2018年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学（理工类）

本试卷分为第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分，共150分，考试用时120分钟。第I卷1至2页，第II卷3至5页。

答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题考上，并在规定位置粘贴考试用条形码。答卷时，考生务必将答案涂写在答题卡上，答在试卷上的无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

祝各位考生考试顺利！

第I卷

注意事项：

1．每小题选出答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。

2．本卷共8小题，每小题5分，共40分。

参考公式：

如果事件 A，B 互斥，那么 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

如果事件 A，B 相互独立，那么 $P(AB)=P(A)P(B)$.

棱柱的体积公式 $V=Sh$，其中 S 表示棱柱的底面面积，h 表示棱柱的高.

棱锥的体积公式 $V=\frac{1}{3}Sh$，其中 S 表示棱锥的底面面积，h 表示棱锥的高.

一. 选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

(1)设全集为 $\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|0<x<2\}$，$B=\{x|x\ge 1\}$，则 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=$

(A) $\{x|0<x\le 1\}$　　(B) $\{x|0<x<1\}$

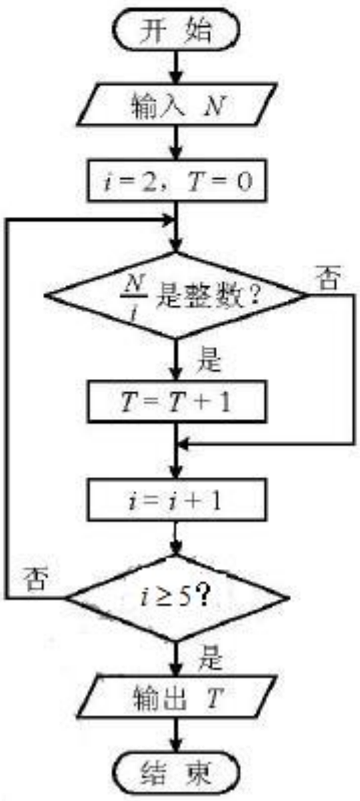
(C) $\{x|1\le x<2\}$　　(D) $\{x|0<x<2\}$

(2)设变量 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y\le 5, \\ 2x-y\le 4, \\ -x+y\le 1, \\ y\ge 0, \end{cases}$ 则目标函数 $z=3x+5y$ 的最大值为

(A) 6　　(B) 19　　(C) 21　　(D) 45

(3)阅读如图的程序框图，运行相应的程序，若输入 N 的值为 20，则输出 T 的值为

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4



(4)设 $x\in\mathbf{R}$，则“$|x-\frac{1}{2}|<\frac{1}{2}$”是“$x^3<1$”的

(A)充分而不必要条件

(B)必要而不充分条件

(C)充要条件

(D)既不充分也不必要条件

(5)已知 $a=\log_2 e$，$b=\ln 2$，$c=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$，则 a，b，c 的大小关系为

(A) $a>b>c$　　(B) $b>a>c$　　(C) $c>b>a$　　(D) $c>a>b$

(6)将函数 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{5})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度，所得图象对应的函数

(A)在区间 $[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$ 上单调递增

(B)在区间 $[\frac{3\pi}{4},\pi]$ 上单调递减

(C)在区间 $[\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}]$ 上单调递增

(D)在区间 $[\frac{3\pi}{2},2\pi]$ 上单调递减

(7)已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$ 的离心率为 2，过右焦点且垂直于 x 轴的直线与双曲线交于 A,B 两点. 设 A,B 到双曲线同一条渐近线的距离分别为 d_1 和 d_2，且 $d_1+d_2=6$，则双曲线的方程为

(A) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$

(B) $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$

(C) $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$

(D) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$

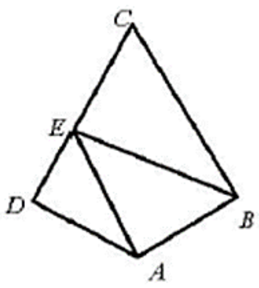
(8)如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB\perp BC$，$AD\perp CD$，$\angle BAD=120°$，$AB=AD=1$. 若点 E 为边 CD 上的动点，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}$ 的最小值为

(A) $\frac{21}{16}$

(B) $\frac{3}{2}$

(C) $\frac{25}{16}$

(D) 3



第（8）题图

第II卷

注意事项：

1. 用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上。

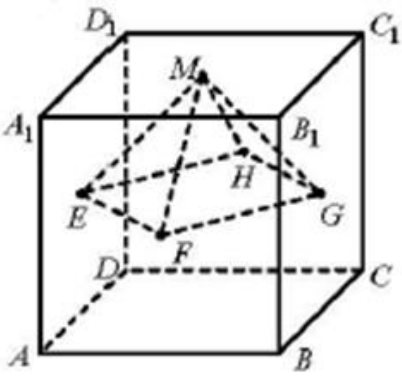
2. 本卷共 12 小题，共 110 分。

二. 填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

(9) i 是虚数单位，复数 $\dfrac{6+7\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=$___________.

(10) 在 $(x-\dfrac{1}{2\sqrt{x}})^5$ 的展开式中，x^2 的系数为____________.

(11) 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，除面 $ABCD$ 外，该正方体其余各面的中心分别为点 E，F，G，H，M(如图)，则四棱锥 $M-EFGH$ 的体积为__________.



第（11）题图

(12)已知圆 $x^2+y^2-2x=0$ 的圆心为 C，直线 $\begin{cases} x=-1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y=3-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数)与该圆相交于 A，B 两点，则 $\triangle ABC$ 的面积为___________.

(13)已知 a , $b\in\mathbf{R}$，且 $a-3b+6=0$，则 $2^a+\dfrac{1}{8^b}$ 的最小值为_____________.

(14)已知 $a>0$, 函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+2ax+a, & x\le 0, \\ -x^2+2ax-2a, & x>0. \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x)=ax$ 恰有 2 个互异的实数解，则 a 的取值范围是______________.

三.解答题：本大题共 6 小题，共 80 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

（15）**（本小题满分 13 分）**

在$\triangle ABC$中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c.已知$b\sin A=a\cos(B-\frac{\pi}{6})$.

（I）求角 B 的大小；

（II）设 a=2，c=3，求 b 和$\sin(2A-B)$的值.

(16)**(本小题满分 13 分)**

已知某单位甲、乙、丙三个部门的员工人数分别为 24，16，16. 现采用分层抽样的方法从中抽取 7 人，进行睡眠时间的调查.

（I）应从甲、乙、丙三个部门的员工中分别抽取多少人？

（II）若抽出的 7 人中有 4 人睡眠不足，3 人睡眠充足，现从这 7 人中随机抽取 3 人做进一步的身体检查.

（i）用 X 表示抽取的 3 人中睡眠不足的员工人数，求随机变量 X 的分布列与数学期望；

（ii）设 A 为事件“抽取的 3 人中，既有睡眠充足的员工，也有睡眠不足的员工”，求事件 A 发生的概率.

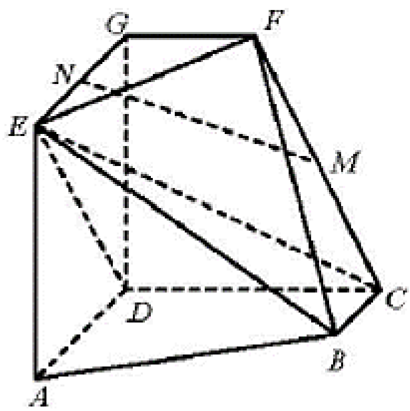
(17)(本小题满分 13 分)

如图，$AD\parallel BC$ 且 AD=2BC，$AD\perp CD$，$EG\parallel AD$ 且 EG=AD，$CD\parallel FG$ 且 CD=2FG，$DG\perp$平面$ABCD$，DA=DC=DG=2.

（I）若 M 为 CF 的中点，N 为 EG 的中点，求证：$MN\parallel$平面CDE；

（II）求二面角 $E-BC-F$ 的正弦值；

（III）若点 P 在线段 DG 上，且直线 BP 与平面 $ADGE$ 所成的角为 60°，求线段 DP 的长.



(18)**(本小题满分 13 分)**

设$\{a_n\}$是等比数列，公比大于 0，其前 n 项和为$S_n(n\in\mathbf{N}^*)$，$\{b_n\}$是等差数列. 已知$a_1=1$，$a_3=a_2+2$，$a_4=b_3+b_5$，$a_5=b_4+2b_6$.

（I）求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（II）设数列$\{S_n\}$的前 n 项和为$T_n(n\in\mathbf{N}^*)$，

（i）求T_n；

（ii）证明$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(T_k+b_{k+2})b_k}{(k+1)(k+2)}=\dfrac{2^{n+2}}{n+2}-2(n\in\mathbf{N}^*)$.

(19)**(本小题满分 14 分)**

设椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1$ (a>b>0)的左焦点为 F，上顶点为 B. 已知椭圆的离心率为$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，点 A 的坐标为$(b,0)$，且$|FB|\cdot|AB|=6\sqrt{2}$.

（I）求椭圆的方程；

（II）设直线 l：$y=kx(k>0)$与椭圆在第一象限的交点为 P，且 l 与直线 AB 交于点 Q.

若$\dfrac{|AQ|}{|PQ|}=\dfrac{5\sqrt{2}}{4}\sin\angle AOQ$ (O 为原点)，求 k 的值.

(20)**(本小题满分 14 分)**

已知函数$f(x)=a^x$，$g(x)=\log_a x$，其中 a>1.

（I）求函数$h(x)=f(x)-x\ln a$的单调区间；

（II）若曲线$y=f(x)$在点$(x_1,f(x_1))$处的切线与曲线$y=g(x)$在点$(x_2,g(x_2))$处的切线平行，证明$x_1+g(x_2)=-\dfrac{2\ln\ln a}{\ln a}$；

（III）证明当$a\geq e^{\frac{1}{e}}$时，存在直线 l，使 l 是曲线$y=f(x)$的切线，也是曲线$y=g(x)$的切线.

参考答案：

一、选择题：本题考查基本知识和基本运算．每小题 5 分，满分 40 分．

（1）B	（2）C	（3）B	（4）A
（5）D	（6）A	（7）C	（8）A

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算．每小题 5 分，满分 30 分．

（9）4–i　　（10）$\frac{5}{2}$　　（11）$\frac{1}{12}$

（12）$\frac{1}{2}$　　（13）$\frac{1}{4}$　　（14）(4，8)

三、解答题

（15）本小题主要考查同角三角函数的基本关系，两角差的正弦与余弦公式，二倍角的正弦与余弦公式，以及正弦定理、余弦定理等基础知识，考查运算求解能力．满分 13 分．

（Ⅰ）解：在△ABC 中，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，可得 $b\sin A=a\sin B$，又由 $b\sin A=a\cos(B-\frac{\pi}{6})$，得 $a\sin B=a\cos(B-\frac{\pi}{6})$，即 $\sin B=\cos(B-\frac{\pi}{6})$，可得 $\tan B=\sqrt{3}$．又因为 $B\in(0，\pi)$，可得 $B=\frac{\pi}{3}$．

（Ⅱ）解：在△ABC 中，由余弦定理及 a=2，c=3，B=$\frac{\pi}{3}$，有 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=7$，故 b=$\sqrt{7}$.

由 $b\sin A=a\cos(B-\frac{\pi}{6})$，可得 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$．因为 $a<c$，故 $\cos A=\frac{2}{\sqrt{7}}$．因此 $\sin 2A=2\sin A\cos A=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，$\cos 2A=2\cos^2 A-1=\frac{1}{7}$.

所以，$\sin(2A-B)=\sin 2A\cos B-\cos 2A\sin B=\frac{4\sqrt{3}}{7}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$.

（16）本小题主要考查随机抽样、离散型随机变量的分布列与数学期望、互斥事件的概率加法公式等基础知识．考查运用概率知识解决简单实际问题的能力．满分 13 分．

（Ⅰ）解：由已知，甲、乙、丙三个部门的员工人数之比为 3∶2∶2，由于采用分层抽样的方法从中抽取 7 人，因此应从甲、乙、丙三个部门的员工中分别抽取 3 人，2 人，2 人．

（Ⅱ）（i）解：随机变量 X 的所有可能取值为 0，1，2，3．

P（X=k）=$\frac{C_4^k\cdot C_3^{3-k}}{C_7^3}$（$k$=0，1，2，3）．

所以，随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

随机变量 X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{35}+1\times\frac{12}{35}+2\times\frac{18}{35}+3\times\frac{4}{35}=\frac{12}{7}$.

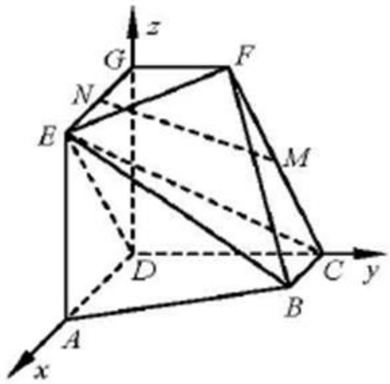
（ii）解：设事件 B 为“抽取的 3 人中，睡眠充足的员工有 1 人，睡眠不足的员工有 2 人”；事件 C 为“抽取的 3 人中，睡眠充足的员工有 2 人，睡眠不足的员工有 1 人”，则 A=B∪C，且 B 与 C 互斥，由（i）知，$P(B)$=$P(X$=2)，$P(C)$=$P(X$=1)，故 $P(A)$=$P(B$∪$C)$=$P(X$=2)+$P(X$=1)=$\frac{6}{7}$.

所以，事件 A 发生的概率为 $\frac{6}{7}$.

（17）本小题主要考查直线与平面平行、二面角、直线与平面所成的角等基础知识．考查用空间向量解决立体几何问题的方法．考查空间想象能力、运算求解能力和推理论证能

力．满分 13 分．

依题意，可以建立以 D 为原点，分别以 $\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DG}$ 的方向为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向的空间直角坐标系（如图），可得 D（0，0，0），A（2，0，0），B（1，2，0），C（0，2，0），E（2，0，2），F（0，1，2），G（0，0，2），M（0，$\frac{3}{2}$，1），N（1，0，2）．



（Ⅰ）证明：依题意 $\overrightarrow{DC}$=（0，2，0），$\overrightarrow{DE}$=（2，0，2）．设 $\boldsymbol{n}_0=(x, y, z)$为平面 CDE 的法向量，则 $\begin{cases} \boldsymbol{n}_0\cdot\overrightarrow{DC}=0, \\ \boldsymbol{n}_0\cdot\overrightarrow{DE}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2y=0, \\ 2x+2z=0, \end{cases}$ 不妨令 z=–1，可得 $\boldsymbol{n}_0$=（1，0，–1）．又 $\overrightarrow{MN}$=（1，$-\frac{3}{2}$，1），可得 $\overrightarrow{MN}\cdot\boldsymbol{n}_0=0$，又因为直线 $MN\not\subset$ 平面 CDE，所以 MN∥平面 CDE．

（Ⅱ）解：依题意，可得 $\overrightarrow{BC}$=（–1，0，0），$\overrightarrow{BE}=(1,-2,2)$，$\overrightarrow{CF}$=（0，–1，2）．

设 $\boldsymbol{n}=(x, y, z)$为平面 BCE 的法向量，则 $\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -x=0, \\ x-2y+2z=0, \end{cases}$ 不妨令 z=1，可得 $\boldsymbol{n}$=（0，1，1）．

设 $\boldsymbol{m}$=（x，y，z）为平面 BCF 的法向量，则 $\begin{cases} \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0, \\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BF}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -x=0, \\ -y+2z=0, \end{cases}$ 不妨令 z=1，可得 $\boldsymbol{m}$=（0，2，1）．

因此有 $\cos\langle\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，于是 $\sin\langle\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}\rangle=\frac{\sqrt{10}}{10}$．

所以，二面角 E–BC–F 的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$．

（Ⅲ）解：设线段 DP 的长为 h（$h\in[0, 2]$），则点 P 的坐标为（0，0，h），可得

$\overrightarrow{BP}=(-1,-2,\ h)$.

易知，$\overrightarrow{DC}$=（0，2，0）为平面 $ADGE$ 的一个法向量，故

$$\left|\cos<\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{DC}>\right|=\frac{\left|\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{DC}\right|}{\left|\overrightarrow{BP}\right|\left|\overrightarrow{DC}\right|}=\frac{2}{\sqrt{h^2+5}},$$

由题意，可得 $\frac{2}{\sqrt{h^2+5}}=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $h=\frac{\sqrt{3}}{3}\in[0,\ 2]$.

所以线段 DP 的长为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

（18）本小题主要考查等差数列的通项公式，等比数列的通项公式及前 n 项和公式等基础知识.考查等差数列求和的基本方法和运算求解能力.满分 13 分.

（I）解：设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q.由 $a_1=1, a_3=a_2+2$, 可得 $q^2-q-2=0$.

因为 $q>0$，可得 $q=2$，故 $a_n=2^{n-1}$.

设等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d，由 $a_4=b_3+b_5$，可得 $b_1+3d=4$. 由 $a_5=b_4+2b_6$，

可得 $3b_1+13d=16$，从而 $b_1=1, d=1$，故 $b_n=n$.

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^{n-1}$，数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=n$.

（II）（i）由（I），有 $S_n=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$，故

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}(2^k-1)=\sum_{k=1}^{n}2^k-n=\frac{2\times(1-2^n)}{1-2}-n=2^{n+1}-n-2.$$

（ii）证明：因为

$$\frac{(T_k+b_{k+2})b_k}{(k+1)(k+2)}=\frac{(2^{k+1}-k-2+k+2)k}{(k+1)(k+2)}=\frac{k\cdot 2^{k+1}}{(k+1)(k+2)}=\frac{2^{k+2}}{k+2}-\frac{2^{k+1}}{k+1},$$

所以，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(T_k+b_{k+2})b_k}{(k+1)(k+2)}=(\frac{2^3}{3}-\frac{2^2}{2})+(\frac{2^4}{4}-\frac{2^3}{3})+\cdots+(\frac{2^{n+2}}{n+2}-\frac{2^{n+1}}{n+1})=\frac{2^{n+2}}{n+2}-2$.

（19）本小题主要考查椭圆的标准方程和几何性质、直线方程等基础知识．考查用代数方法研究圆锥曲线的性质．考查运算求解能力，以及用方程思想解决问题的能力．满分 14

分.

（Ⅰ）解：设椭圆的焦距为 $2c$，由已知知 $\frac{c^2}{a^2}=\frac{5}{9}$，又由 $a^2=b^2+c^2$，可得 $2a=3b$．由已知可得，$|FB|=a$，$|AB|=\sqrt{2}b$，由 $|FB|\cdot|AB|=6\sqrt{2}$，可得 $ab=6$，从而 $a=3$，$b=2$．

所以，椭圆的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$．

（Ⅱ）解：设点 P 的坐标为（x_1，y_1），点 Q 的坐标为（x_2，y_2）．由已知有 $y_1>y_2>0$，故 $|PQ|\sin\angle AOQ=y_1-y_2$．又因为 $|AQ|=\frac{y_2}{\sin\angle OAB}$，而 $\angle OAB=\frac{\pi}{4}$，故 $|AQ|=\sqrt{2}y_2$．由 $\frac{|AQ|}{|PQ|}=\frac{5\sqrt{2}}{4}\sin\angle AOQ$，可得 $5y_1=9y_2$．

由方程组 $\begin{cases} y=kx, \\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1, \end{cases}$ 消去 x，可得 $y_1=\frac{6k}{\sqrt{9k^2+4}}$．易知直线 AB 的方程为 $x+y-2=0$，

由方程组 $\begin{cases} y=kx, \\ x+y-2=0, \end{cases}$

消去 x，可得 $y_2=\frac{2k}{k+1}$．由 $5y_1=9y_2$，可得 $5(k+1)=3\sqrt{9k^2+4}$，两边平方，整理得 $56k^2-50k+11=0$，解得 $k=\frac{1}{2}$，或 $k=\frac{11}{28}$．

所以，k 的值为 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{11}{28}$.

（20）本小题主要考查导数的运算、导数的几何意义、运用导数研究指数函数与对数函数的性质等基础知识和方法.考查函数与方程思想、化归思想.考查抽象概括能力、综合分析问题和解决问题的能力.满分 14 分.

（I）解：由已知，$h(x)=a^x-x\ln a$，有 $h'(x)=a^x\ln a-\ln a$．

令 $h'(x)=0$，解得 $x=0$.

由 $a>1$，可知当 x 变化时，$h'(x)$，$h(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$h'(x)$	$-$	0	$+$

$h(x)$	]	极小值	Z

所以函数 $h(x)$ 的单调递减区间 $(-\infty,0)$，单调递增区间为 $(0,+\infty)$.

（II）**证明：** 由 $f'(x)=a^x\ln a$，可得曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_1,f(x_1))$ 处的切线斜率为 $a^{x_1}\ln a$.

由 $g'(x)=\dfrac{1}{x\ln a}$，可得曲线 $y=g(x)$ 在点 $(x_2,g(x_2))$ 处的切线斜率为 $\dfrac{1}{x_2\ln a}$.

因为这两条切线平行，故有 $a^{x_1}\ln a=\dfrac{1}{x_2\ln a}$，即 $x_2a^{x_1}(\ln a)^2=1$.

两边取以 a 为底的对数，得 $\log_a x_2+x_1+2\log_2\ln a=0$，所以 $x_1+g(x_2)=-\dfrac{2\ln\ln a}{\ln a}$.

（III）**证明：** 曲线 $y=f(x)$ 在点 (x_1,a^{x_1}) 处的切线 l_1： $y-a^{x_1}=a^{x_1}\ln a\cdot(x-x_1)$.

曲线 $y=g(x)$ 在点 $(x_2,\log_a x_2)$ 处的切线 l_2： $y-\log_a x_2=\dfrac{1}{x_2\ln a}\cdot(x-x_2)$.

要证明当 $a\ge e^{\frac{1}{e}}$ 时，存在直线 l，使 l 是曲线 $y=f(x)$ 的切线，也是曲线 $y=g(x)$ 的切线，只需证明当 $a\ge e^{\frac{1}{e}}$ 时，存在 $x_1\in(-\infty,+\infty)$， $x_2\in(0,+\infty)$，使得 l_1 和 l_2 重合.

即只需证明当 $a\ge e^{\frac{1}{e}}$ 时，方程组 $\begin{cases} a^{x_1}\ln a=\dfrac{1}{x_2\ln a} & ① \\ a^{x_1}-x_1a^{x_1}\ln a=\log_a x_2-\dfrac{1}{\ln a} & ② \end{cases}$ 有解，

由①得 $x_2=\dfrac{1}{a^{x_1}(\ln a)^2}$，代入②，得 $a^{x_1}-x_1a^{x_1}\ln a+x_1+\dfrac{1}{\ln a}+\dfrac{2\ln\ln a}{\ln a}=0$.　③

因此，只需证明当 $a\ge e^{\frac{1}{e}}$ 时，关于 x_1 的方程③有实数解.

设函数 $u(x)=a^x-xa^x\ln a+x+\dfrac{1}{\ln a}+\dfrac{2\ln\ln a}{\ln a}$，即要证明当 $a\ge e^{\frac{1}{e}}$ 时，函数 $y=u(x)$ 存在零点.

$u'(x)=1-(\ln a)^2xa^x$，可知 $x\in(-\infty,0)$ 时，$u'(x)>0$； $x\in(0,+\infty)$ 时，$u'(x)$ 单调递减，又

$u'(0)=1>0$，$u'\left[\dfrac{1}{(\ln a)^2}\right]=1-a^{\frac{1}{(\ln a)^2}}<0$，故存在唯一的 x_0，且 $x_0>0$，使得 $u'(x_0)=0$，

即

$1-(\ln a)^2 x_0 a^{x_0}=0$.

由此可得 $u(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减. $u(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得

极大值 $u(x_0)$.

因为 $a\geq e^{\frac{1}{e}}$，故 $\ln(\ln a)\geq -1$，

所以

$$u(x_0)=a^{x_0}-x_0a^{x_0}\ln a+x_0+\frac{1}{\ln a}+\frac{2\ln\ln a}{\ln a}=\frac{1}{x_0(\ln a)^2}+x_0+\frac{2\ln\ln a}{\ln a}\geq\frac{2+2\ln\ln a}{\ln a}\geq 0$$

.

下面证明存在实数 t，使得 $u(t)<0$.

由（I）可得 $a^x\geq 1+x\ln a$，

当 $x>\dfrac{1}{\ln a}$ 时，

有

$$u(x)\leq(1+x\ln a)(1-x\ln a)+x+\frac{1}{\ln a}+\frac{2\ln\ln a}{\ln a}=-(\ln a)^2x^2+x+1+\frac{1}{\ln a}+\frac{2\ln\ln a}{\ln a}$$

，

所以存在实数 t，使得 $u(t)<0$

因此，当 $a\geq e^{\frac{1}{e}}$ 时，存在 $x_1\in(-\infty,+\infty)$，使得 $u(x_1)=0$.

所以，当 $a\geq e^{\frac{1}{e}}$ 时，存在直线 l，使 l 是曲线 $y=f(x)$ 的切线，也是曲线 $y=g(x)$ 的切线.#