2018 年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．作答时，务必将答案写在答题卡上。写在本试卷及草稿纸上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

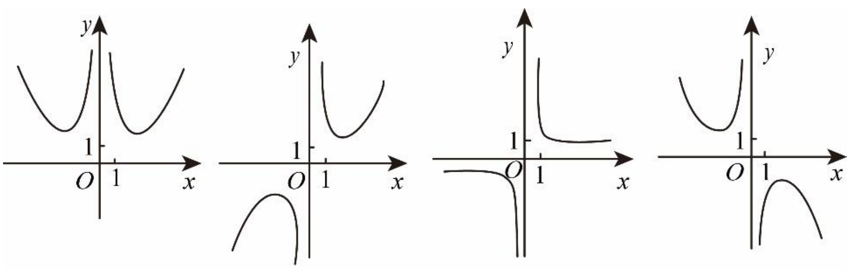
1．$\dfrac{1+2i}{1-2i}=$

A．$-\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}i$　　B．$-\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}i$　　C．$-\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}i$　　D．$-\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i$

2．已知集合 $A=\left\{(x,\ y)\middle|x^2+y^2\leqslant 3,\ x\in \mathbf{Z},\ y\in \mathbf{Z}\right\}$，则 A 中元素的个数为

A．9　　B．8　　C．5　　D．4

3．函数 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{x^2}$ 的图像大致为



A　　B　　C　　D

4．已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$，则 $\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=$

A．4　　B．3　　C．2　　D．0

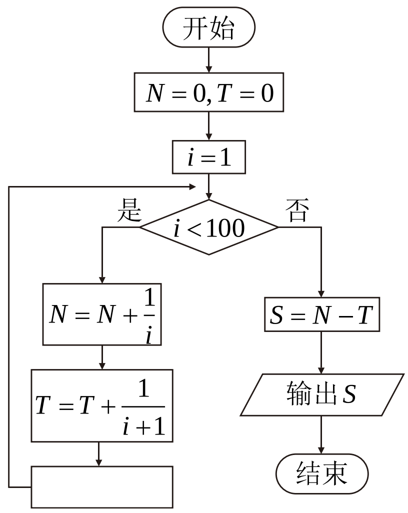
5．双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$，则其渐近线方程为

A．$y=\pm\sqrt{2}x$　　B．$y=\pm\sqrt{3}x$　　C．$y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$　　D．$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

6．在 $\triangle ABC$ 中，$\cos\dfrac{C}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$BC=1$，$AC=5$，则 $AB=$

A．$4\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{30}$　　C．$\sqrt{29}$　　D．$2\sqrt{5}$

7．为计算 $S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$，设计了右侧的程序框图，则在空白框中应填入



A． $i=i+1$

B． $i=i+2$

C． $i=i+3$

D． $i=i+4$

8. 我国数学家陈景润在哥德巴赫猜想的研究中取得了世界领先的成果. 哥德巴赫猜想是“每个大于 2 的偶数可以表示为两个素数的和”，如 $30=7+23$．在不超过 30 的素数中，随机选取两个不同的数，其和等于 30 的概率是

A． $\frac{1}{12}$　　B． $\frac{1}{14}$　　C． $\frac{1}{15}$　　D． $\frac{1}{18}$

9．在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=1$，$AA_1=\sqrt{3}$，则异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角的余弦值为

A． $\frac{1}{5}$　　B． $\frac{\sqrt{5}}{6}$　　C． $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D． $\frac{\sqrt{2}}{2}$

10．若 $f(x)=\cos x-\sin x$ 在 $[-a,a]$ 是减函数，则 a 的最大值是

A． $\frac{\pi}{4}$　　B． $\frac{\pi}{2}$　　C． $\frac{3\pi}{4}$　　D． π

11．已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 的奇函数，满足 $f(1-x)=f(1+x)$．若 $f(1)=2$，则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=$

A． -50　　B． 0　　C． 2　　D． 50

12．已知 F_1，F_2 是椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的左、右焦点，A 是 C 的左顶点，点 P 在过 A 且斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 的直线上，$\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形，$\angle F_1F_2P=120^\circ$，则 C 的离心率为

A． $\frac{2}{3}$　　B． $\frac{1}{2}$　　C． $\frac{1}{3}$　　D． $\frac{1}{4}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．曲线 $y=2\ln(x+1)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为__________.

14. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+2y-5\ge 0, \\ x-2y+3\ge 0, \\ x-5\le 0, \end{cases}$ 则 $z=x+y$ 的最大值为__________.

15. 已知 $\sin\alpha+\cos\beta=1$， $\cos\alpha+\sin\beta=0$， 则 $\sin(\alpha+\beta)=$__________.

16. 已知圆锥的顶点为 S，母线 SA，SB 所成角的余弦值为 $\frac{7}{8}$，SA 与圆锥底面所成角为 45°，若 $\triangle SAB$ 的面积为 $5\sqrt{15}$，则该圆锥的侧面积为__________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分。

17. （12 分）

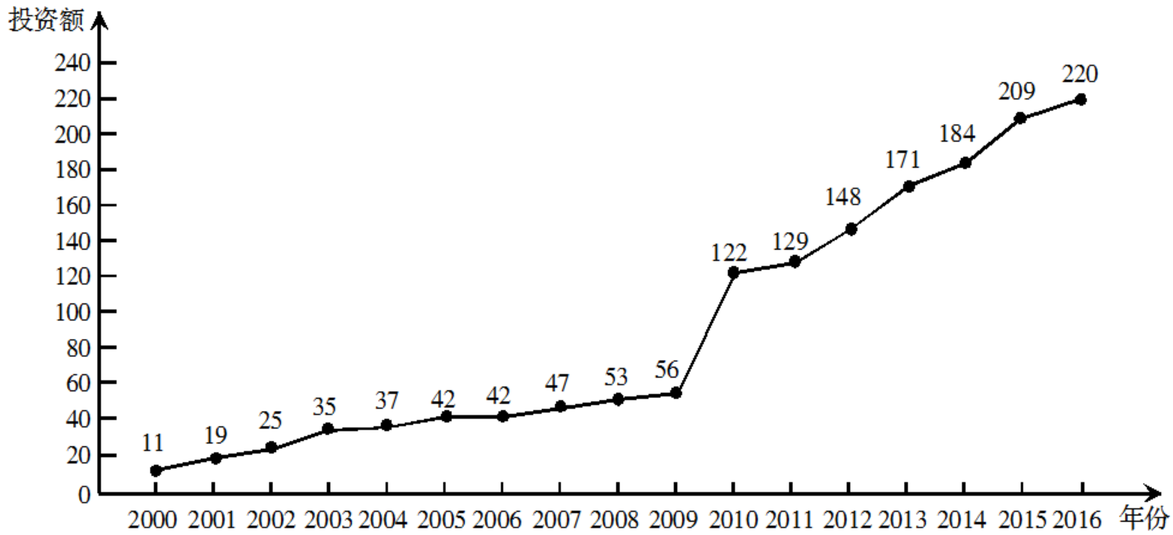
记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1=-7$， $S_3=-15$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求 S_n， 并求 S_n 的最小值.

18. （12 分）

下图是某地区 2000 年至 2016 年环境基础设施投资额 y（单位：亿元）的折线图.



为了预测该地区 2018 年的环境基础设施投资额，建立了 y 与时间变量 t 的两个线性回归模型．根据 2000 年至 2016 年的数据（时间变量 t 的值依次为 $1, 2, \cdots, 17$）建立模型①：$\hat{y}=-30.4+13.5t$；根据 2010 年至 2016 年的数据（时间变量 t 的值依次为 $1, 2, \cdots, 7$）建立模型②： $\hat{y}=99+17.5t$.

（1）分别利用这两个模型，求该地区 2018 年的环境基础设施投资额的预测值；

（2）你认为用哪个模型得到的预测值更可靠？并说明理由.

19. （12 分）

设抛物线C：$y^2=4x$ 的焦点为F，过F 且斜率为$k(k>0)$的直线l与C交于A，B两点，$|AB|=8$.

（1）求l的方程

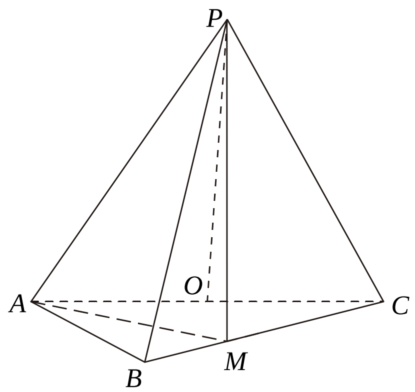
（2）求过点A，B且与C的准线相切的圆的方程.

20. （12 分）

如图，在三棱锥$P-ABC$中，$AB=BC=2\sqrt{2}$，$PA=PB=PC=AC=4$，O为AC的中点.

（1）证明：$PO\perp$平面ABC；

（2）若点M在棱BC上，且二面角$M-PA-C$为$30°$，求PC与平面PAM所成角的正弦值.



21. （12 分）

已知函数$f(x)=e^x-ax^2$.

（1）若$a=1$，证明：当$x\geq 0$时，$f(x)\geq 1$；

（2）若$f(x)$在$(0,+\infty)$只有一个零点，求a.

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分.

22. [选修 4—4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系xOy中，曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=2\cos\theta,\\ y=4\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数），直线$l$的参数方程为

$\begin{cases}x=1+t\cos\alpha,\\ y=2+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$为参数）.

（1）求C和l的直角坐标方程；

（2）若曲线C截直线l所得线段的中点坐标为$(1,2)$，求l的斜率.

23．[选修4—5：不等式选讲]（10分）

设函数$f(x)=5-|x+a|-|x-2|$.

（1）当$a=1$时，求不等式$f(x)\geq 0$的解集；

（2）若$f(x)\leq 1$，求a的取值范围.

绝密★启用前

2018年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学试题参考答案

一、选择题

1．D	2．A	3．B	4．B	5．A	6．A
7．B	8．C	9．C	10．A	11．C	12．D

二、填空题

13． $y=2x$　　14．9　　15． $-\dfrac{1}{2}$　　16． $40\sqrt{2}\pi$

三、解答题

17．解：

（1）设$\{a_n\}$的公差为 *d*，由题意得$3a_1+3d=-15$.

由$a_1=-7$得 *d*=2.

所以$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n-9$.

（2）由（1）得$S_n=n^2-8n=(n-4)^2-16$.

所以当 *n*=4 时，S_n取得最小值，最小值为–16.

18．解：

（1）利用模型①，该地区 2018 年的环境基础设施投资额的预测值为

$$\hat{y}=-30.4+13.5\times 19=226.1\text{(亿元)}.$$

利用模型②，该地区 2018 年的环境基础设施投资额的预测值为

$$\hat{y}=99+17.5\times 9=256.5\text{(亿元)}.$$

（2）利用模型②得到的预测值更可靠.

理由如下：

（ⅰ）从折线图可以看出，2000 年至 2016 年的数据对应的点没有随机散布在直线 $y=-30.4+13.5t$ 上下．这说明利用 2000 年至 2016 年的数据建立的线性模型①不能很好地描述环境基础设施投资额的变化趋势．2010 年相对 2009 年的环境基础设施投资

额有明显增加，2010 年至 2016 年的数据对应的点位于一条直线的附近，这说明从 2010 年开始环境基础设施投资额的变化规律呈线性增长趋势，利用 2010 年至 2016 年的数据建立的线性模型 $\hat{y}=99+17.5t$ 可以较好地描述 2010 年以后的环境基础设施投资额的变化趋势，因此利用模型②得到的预测值更可靠.

（ii）从计算结果看，相对于 2016 年的环境基础设施投资额 220 亿元，由模型①得到的预测值 226.1 亿元的增幅明显偏低，而利用模型②得到的预测值的增幅比较合理．说明利用模型②得到的预测值更可靠.

以上给出了 2 种理由，考生答出其中任意一种或其他合理理由均可得分.

19．解：

（1）由题意得 $F(1,0)$，l 的方程为 $y=k(x-1)(k>0)$.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases} y=k(x-1), \\ y^2=4x \end{cases}$ 得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$.

$\Delta=16k^2+16>0$，故 $x_1+x_2=\dfrac{2k^2+4}{k^2}$.

所以 $|AB|=|AF|+|BF|=(x_1+1)+(x_2+1)=\dfrac{4k^2+4}{k^2}$.

由题设知 $\dfrac{4k^2+4}{k^2}=8$，解得 $k=-1$（舍去），$k=1$.

因此 l 的方程为 $y=x-1$.

（2）由（1）得 AB 的中点坐标为 $(3,2)$，所以 AB 的垂直平分线方程为 $y-2=-(x-3)$，

即 $y=-x+5$.

设所求圆的圆心坐标为 (x_0,y_0)，则

$$\begin{cases} y_0=-x_0+5, \\ (x_0+1)^2=\dfrac{(y_0-x_0+1)^2}{2}+16. \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x_0=3, \\ y_0=2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x_0=11, \\ y_0=-6. \end{cases}$$

因此所求圆的方程为$(x-3)^2+(y-2)^2=16$或$(x-11)^2+(y+6)^2=144$．

20．解：

（1）因为$AP=CP=AC=4$，O为AC的中点，所以$OP\perp AC$，且$OP=2\sqrt{3}$．

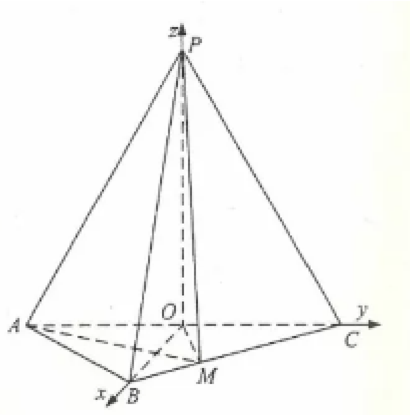
连结OB．因为$AB=BC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AC$，所以$\triangle ABC$为等腰直角三角形，

且$OB\perp AC$，$OB=\dfrac{1}{2}AC=2$．

由$OP^2+OB^2=PB^2$知$PO\perp OB$．

由$OP\perp OB,OP\perp AC$知$PO\perp$平面ABC．

（2）如图，以O为坐标原点，$\overrightarrow{OB}$的方向为x轴正方向，建立空间直角坐标系$O-xyz$．



由已知得$O(0,0,0),B(2,0,0),A(0,-2,0),C(0,2,0),P(0,0,2\sqrt{3}),\overrightarrow{AP}=(0,2,2\sqrt{3})$，取平面$PAC$的法向量$\overrightarrow{OB}=(2,0,0)$．

设$M(a,2-a,0)(0<a\le 2)$，则$\overrightarrow{AM}=(a,4-a,0)$．

设平面PAM的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$．

由$\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}=0,\overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{n}=0$得$\begin{cases}2y+2\sqrt{3}z=0\\ax+(4-a)y=0\end{cases}$，可取$\boldsymbol{n}=(\sqrt{3}(a-4),\sqrt{3}a,-a)$，

所以$\cos\left\langle\overrightarrow{OB},\boldsymbol{n}\right\rangle=\dfrac{2\sqrt{3}(a-4)}{2\sqrt{3(a-4)^2+3a^2+a^2}}$．

由已知可得$|\cos\langle\overrightarrow{OB},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

所以$\dfrac{2\sqrt{3}|a-4|}{2\sqrt{3(a-4)^2+3a^2+a^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 解得$a=-4$（舍去），$a=\dfrac{4}{3}$.

所以$\boldsymbol{n}=(-\dfrac{8\sqrt{3}}{3},\dfrac{4\sqrt{3}}{3},-\dfrac{4}{3})$.

又$\overrightarrow{PC}=(0,2,-2\sqrt{3})$，所以$\cos\langle\overrightarrow{PC},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

所以PC与平面PAM所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

21．**解：**

（1）当$a=1$时，$f(x)\ge 1$等价于$(x^2+1)e^{-x}-1\le 0$.

设函数$g(x)=(x^2+1)e^{-x}-1$，则$g'(x)=-(x^2-2x+1)e^{-x}=-(x-1)^2e^{-x}$.

当$x\ne 1$时，$g'(x)<0$，所以$g(x)$在$(0,+\infty)$单调递减.

而$g(0)=0$，故当$x\ge 0$时，$g(x)\le 0$，即$f(x)\ge 1$.

（2）设函数$h(x)=1-ax^2e^{-x}$.

$f(x)$在$(0,+\infty)$只有一个零点当且仅当$h(x)$在$(0,+\infty)$只有一个零点.

（i）当$a\le 0$时，$h(x)>0$，$h(x)$没有零点；

（ii）当$a>0$时，$h'(x)=ax(x-2)e^{-x}$.

当$x\in(0,2)$时，$h'(x)<0$；当$x\in(2,+\infty)$时，$h'(x)>0$.

所以$h(x)$在$(0,2)$单调递减，在$(2,+\infty)$单调递增.

故$h(2)=1-\dfrac{4a}{e^2}$是$h(x)$在$[0,+\infty)$的最小值.

①若$h(2)>0$，即$a<\dfrac{e^2}{4}$，$h(x)$在$(0,+\infty)$没有零点；

②若 $h(2)=0$，即 $a=\dfrac{e^2}{4}$， $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 只有一个零点；

③若 $h(2)<0$，即 $a>\dfrac{e^2}{4}$， 由于 $h(0)=1$， 所以 $h(x)$ 在 $(0,2)$ 有一个零点，

由（1）知，当 $x>0$ 时，$e^x>x^2$，所以

$h(4a)=1-\dfrac{16a^3}{e^{4a}}=1-\dfrac{16a^3}{(e^{2a})^2}>1-\dfrac{16a^3}{(2a)^4}=1-\dfrac{1}{a}>0$.

故 $h(x)$ 在 $(2,4a)$ 有一个零点，因此 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有两个零点.

综上， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 只有一个零点时， $a=\dfrac{e^2}{4}$.

22．解：

（1）曲线 C 的直角坐标方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

当 $\cos\alpha\neq 0$ 时，l 的直角坐标方程为 $y=\tan\alpha\cdot x+2-\tan\alpha$ ，

当 $\cos\alpha=0$ 时，l 的直角坐标方程为 $x=1$.

（2）将 l 的参数方程代入 C 的直角坐标方程，整理得关于 t 的方程

$$(1+3\cos^2\alpha)t^2+4(2\cos\alpha+\sin\alpha)t-8=0 .\quad ①$$

因为曲线 C 截直线 l 所得线段的中点 $(1,2)$ 在 C 内，所以①有两个解，设为 t_1， t_2 ，则

$t_1+t_2=0$.

又由①得 $t_1+t_2=-\dfrac{4(2\cos\alpha+\sin\alpha)}{1+3\cos^2\alpha}$ ， 故 $2\cos\alpha+\sin\alpha=0$ ， 于是直线 l 的斜率

$k=\tan\alpha=-2$.

23．解：

（1）当 $a=1$ 时， $f(x)=\begin{cases}2x+4, x\le -1,\\ 2, -1<x\le 2,\\ -2x+6, x>2.\end{cases}$

可得 $f(x)\ge 0$ 的解集为 $\{x\,|-2\le x\le 3\}$.

（2）$f(x)\le 1$等价于$|x+a|+|x-2|\ge 4$．

而$|x+a|+|x-2|\ge|a+2|$，且当$x=2$时等号成立．故$f(x)\le 1$等价于$|a+2|\ge 4$．

由$|a+2|\ge 4$可得$a\le -6$或$a\ge 2$，所以a的取值范围是$(-\infty,-6]\cup[2,+\infty)$