绝密★启用前

2017 年普通高等学校招生全国统一考试（新课标III）

文科数学

一．选择题

1.已知集合 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,4,6,8\}$，则 $A\cap B$ 中的元素的个数为（　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

答案：B

【解析】　集合 A 和集合 B 有共同元素 2，4，则 $A\cap B=\{2,4\}$ 所以元素个数为 2.【解析】

2.复平面内表示复数 $z=i(-2+\mathrm{i})$ 的点位于（　　）

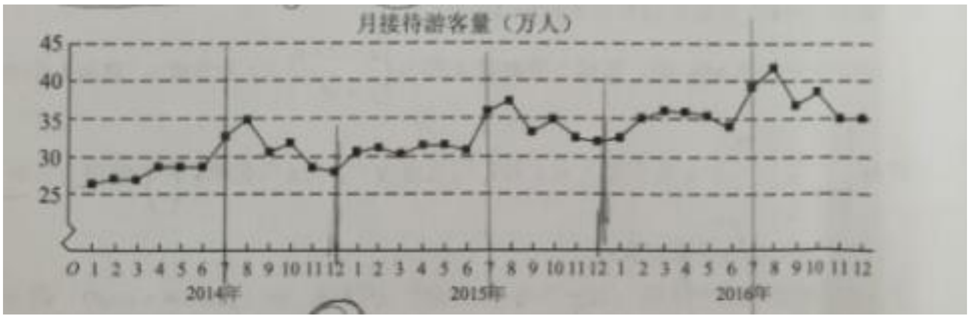
A. 第一象限　　B.第二象限　　C.第三象限　　D.第四象限

解：　化解 $z=i(-2+\mathrm{i})$ 得 $z=-2i+i^2=-2i-1$，

所以复数位于第三象限。

答案选：C

3．某城市为了解游客人数的变化规律，提高旅游服务质量，收集并整理了 2014 年 1 月至 2016 年 12 月期间月接待游客量（单位：万人）的数据，绘制了下面的折线图.



根据该折线图，下列结论错误的是（　　）

A．月接待游客量逐月增加

B．年接待游客量逐年增加

C．各年的月接待游客量高峰期大致在 7，8 月

D．各年 1 月至 6 月的月接待游客量相对于 7 月至 12 月，波动性更小，变化比较平稳

【答案】A

【解析】由折线图可知，每年月接待游客量从 8 月份后存在下降趋势，故选 A.

4．已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{4}{3}$,，则 $\sin 2\alpha=(A)$

$A.-\dfrac{7}{9}$　　$B.-\dfrac{2}{9}$　　$C.\dfrac{2}{9}$　　$D.\dfrac{7}{9}$

解析：

Q $\left(\sin\alpha-\cos\alpha\right)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=1-\sin2\alpha=\frac{16}{9},\therefore\sin2\alpha=-\frac{7}{9}$

故选 A

5.设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}3x+2y-6\le0,\\x\ge0,\\y\ge0,\end{cases}$ 则 $z=x-y$ 的取值范围是（）

A. $\left[-3,0\right]$　　B.$\left[-3,2\right]$　　C.$\left[0,2\right]$　　D$\left[0,3\right]$

【答案】选 B

【解析】由题意，画出可行域，端点坐标 $O\left(0,0\right),A\left(0,3\right),B\left(2,0\right)$.

在端点 A,B 处分别取的最小值与最大值.

所以最大值为 2，最小值为 -3.

故选 B

6.函数 $f(x)=\frac{1}{5}\sin(x+\frac{\pi}{3})+\cos(x-\frac{\pi}{6})$ 的最大值为（　　）

A. $\frac{6}{5}$　　B. 1　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{1}{5}$

【解析】( )

$f(x)=\frac{1}{5}\sin(x+\frac{\pi}{3})+\cos(x-\frac{\pi}{6})$

$=\frac{1}{5}(\sin x\cdot\frac{1}{2}+\cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2})+\cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin x\cdot\frac{1}{2}$

$=\frac{3}{5}\sin x+\frac{3\sqrt{3}}{5}\cos x$

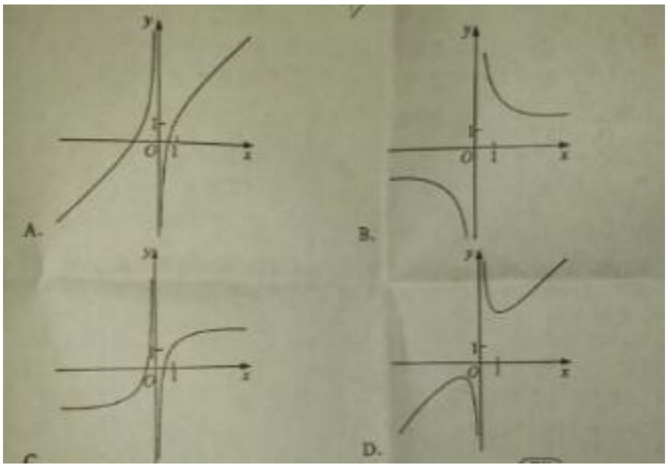
$=\frac{3}{5}\cdot2\sin(x+\frac{\pi}{3})$

$=\frac{6}{5}\sin(x+\frac{\pi}{3})$

故选 A

( )

7.函数 $y=1+x+\frac{\sin x}{x^2}$ 的部分图像大致为（　　）



答案：D

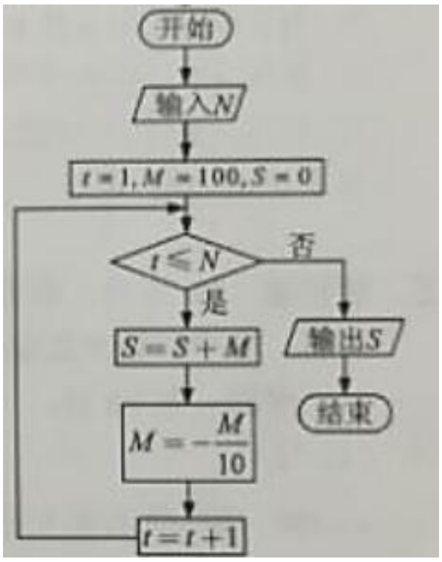
8．执行右面的程序框图，为使输出 S 的值小于 91，则输入的正整数 N 的最小值为（　　）

A.5

B.4

C.3

D.2



【解析】 利用排除法

当输入的正整数 $N=2$ 时，

$t=1$

$M=100, S=0$

$S=0+100=100$

$M=-\frac{100}{10}=-10$

$t=2$

$S=100-10=90$

$M=-\frac{10}{10}$

$t=3, N=2, t\le 2$

否，输出 $S=90$

答案选 D

9.已知圆柱的高为 1，它的两个底面的圆周在直径为 2 的同一个球的球面上，则该圆柱的体积为　（　　）

A. π　　B. $\frac{3\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{\pi}{4}$

解：圆柱的高 h=1,设圆柱的底面圆半径为 r，

则 $h^2+(2r)^2=2^2$

$\therefore r=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore V = \pi r^2 h = \dfrac{3\pi}{4}$

选 B

10.在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为棱 CD 的中点，则（　　）

A. $A_1E \perp DC_1$　　　B. $A_1E \perp BD$　　　C. $A_1E \perp BC_1$　　　D. $A_1E \perp AC$

【答案】C

【解析】$\because$ $A_1B_1 \perp$ 平面 BCC_1B_1 $\therefore A_1B_1 \perp BC_1$，$BC_1 \perp B_1C$ 又 $B_1C \cap A_1B_1 = B_1$，$\therefore BC_1 \perp$ 平面 A_1B_1CD，

又 $A_1E \subset$ 平面 A_1B_1CD $\therefore A_1E \perp BC_1$.

11.已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2，且以线段 A_1A_2 为直径的圆与直线 $bx-ay+2ab=0$ 相切，则 C 的离心率为（　　）

A $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　　B $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　　C $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　　D $\dfrac{1}{3}$

【解析】【三阶数学】由题意可得：$a = \dfrac{|b\cdot 0 - a\cdot 0 + 2ab|}{\sqrt{b^2+(-a)^2}}$

得 $a^2 = 3b^2$【三阶数学】

又 $b^2 = a^2 - c^2$【三阶数学】

所以 $a^2 = 3(a^2 - c^2)$【三阶数学】

则 $e = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$【三阶数学】

12.已知函数 $f(x) = x^2 - 2x + a(e^{x-1} + e^{-x+1})$ 有唯一零点，则 $a =$（　　）

A $-\dfrac{1}{2}$　　　B $\dfrac{1}{3}$　　　C $\dfrac{1}{2}$　　　D 1

【解析】 $\because$ $f'(x) = 2x - 2 + a(e^{x-1} - e^{-x+1}) = 0$

得 $x = 1$

即 $x = 1$ 为函数的极值点，故 $f(1) = 0$

则 $1-2+2a=0$，$a = \dfrac{1}{2}$

二．填空题

13、已知向量 $\vec{a}=(-2,3)$，$\vec{b}=(3,m)$，且 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $m=$______。

解析： 因为 $\vec{a}\perp\vec{b}\therefore\vec{a}\bullet\vec{b}=0$ 得 $-6+3m=0$，$\therefore m=2$ 。

14.双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{9}=1(a>0)$ 的一条渐近线方程为 $y=\frac{3}{5}x$，则 $a=$______。

【解析】 渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，由题知 $b=3$，所以 $a=5$。

15. ΔABC 内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $C=60^0,b=\sqrt{6},c=3$，则 $A=$________15

【解析】

根据正弦定理有： $\frac{3}{\sin 60^0}=\frac{\sqrt{6}}{\sin B}$

$\therefore \sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$

又Θ $c>b$ $\therefore B=45^0$ $\therefore A=75^0$

16.设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1,x\le 0,\\ 2^x,x>0,\end{cases}$，则满足 $f(x)+f(x-\frac{1}{2})>1$ 的 x 的取值范围是____.

解析： 当 $x\le 0$ 时， $f(x)+f(x-\frac{1}{2})=x+1+x-\frac{1}{2}+1>0\therefore x>-\frac{1}{4}$

$\Theta -\frac{1}{4}<x\le 0$

当 $0<x\le\frac{1}{2}$ 时， $f(x)+f(x-\frac{1}{2})=2^x+x-\frac{1}{2}+1>1$ 恒成立

当 $x>\frac{1}{2}$ 时， $2^x+2^{x-\frac{1}{2}}>1$ 恒成立；

综上， x 的取值范围为 $(-\frac{1}{4},+\infty)$。

三．解答题

17.设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+3a_2+\cdots+(2n-1)a_n=2n$

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求数列 $\left\{\frac{a_n}{2n+1}\right\}$ 的前 n 项和；

【答案】

【解析】（1）当$n=1$时，$a_1=2$ 1

当$n\ge 2$时，由$a_1+3a_2+\cdots+(2n-1)a_n=2n$①······························2

$a_1+3a_2+\cdots+(2n-3)a_{n-1}=2(n-1)$②························. 3

① −②得$(2n-1)a_n=2$ 4

即$a_n=\dfrac{2}{2n-1}(n\ge 2)$

验证$a_1=2$符合上式

所以$a_n=\dfrac{2}{2n-1}(n\in N^*)$ 6

（2）$\dfrac{a_n}{2n+1}=\dfrac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}$ 8

$S_n=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-3}-\dfrac{1}{2n-1}+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}=1-\dfrac{1}{2n+1}=\dfrac{2n}{2n+1}$ 12

18（12 分）某超市计划按月订购一种酸奶，每天进货量相同，进货成本每瓶4元，售价每瓶6元，未售出的酸奶降价处理，以每瓶2元的价格当天全部处理完。根据往年销售经验，每天需求量与当天最高气温（单位：$°C$）有关。如果最高气温不低于25，需求量为500瓶；如果最高气温位于区间$[20,25)$，需求量为300瓶；如果最高气温低于20，需求量为200瓶。为了确定六月份的订购计划，统计了前三年六月份各天的最高气温数据，得下面的频率分布表：

最高气温	$[10,15)$	$[15,20)$	$[20,25)$	$[25,30)$	$[30,35)$	$[35,40)$
天数	2	16	36	25	7	4

以最高气温位于各区间的频率代替最高气温位于该区间的概率。

(1)估计六月份这种酸奶一天的需求量不超过300瓶的概率；

(2)设六月份一天销售这种酸奶的利润为Y（单位：元）。当六月份这种酸奶一天的进货量为450瓶时，写出Y的所有可能值并估计Y大于0的概率？

解析：(1) $P=\dfrac{3}{5}$..............................4

(2)当温度大于等于$25°C$时，需求量为500，

$Y=450\times 2=900$元....................................6

当温度在$[20,25)$ $°C$时，需求量为300，............................8

$Y=300\times 2-(450-300)\times 2=300$ 元

当温度低于 $20°C$ 时，需求量为 200，

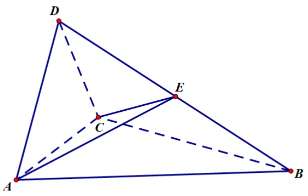
$Y=400-(450-200)\times 2=-100$ 元............................10

当温度大于等于 20 时，$Y>0$，$P=\dfrac{72}{90}=\dfrac{4}{5}$。 12

19,如图，四面体 $ABCD$ 中，ΔABC 是正三角形，$AD=CD$

（1）证明：$AC\perp BD$

（2）已知 ΔACD 是直角三角形，$AB=BD$,若 E 为棱 BD 上与 D 不重合的点，且 $AE\perp EC$，求四面体 $ABCE$ 与四面体 $ACDE$ 的体积比



解：（1）取 AC 中点 F，连接 DF,BF

$\because$ $AD=DC$，且 F 是 AC 中点 $\therefore DF\perp AC$。同理：$BF\perp AC$ 2

在平面 DFB 中，$DF\cap BF=F$ $\therefore AC\perp DFB$

又 $\because$ $BD\subset$ 面 DFB，$\therefore AC\perp BD$ 4

（2）由题意，令 $AB=BC=AC=BD=2a$，即 $BF=\sqrt{3}a$ 6

$\because$ $CE\perp AE,F$ 为 AC 中点，$\therefore EF=\dfrac{1}{2}AC=a$ 8

$\therefore$ 在直角 ΔACD 中，$DF=a$，

$\therefore$ ΔBDF 中有 $DF^2+BF^2=BD^2$ $\therefore DF\perp BF$

又 $EF=\dfrac{1}{2}BD=a$ $\therefore E$ 为 BD 中点............................10

$\therefore \dfrac{V_{ABCE}}{V_{ACDE}}=1$ 12

20（12 分）在直角坐标系 xOy 中，曲线 $y=x^2+mx-2$ 与 x 轴交于 A,B 两点，点 C 的坐标为（0,1）。当 m 变化时，解答下列问题：

（1） 能否出现 $AC\perp BC$ 的情况？说明理由；

（2） 证明过 A，B，C 三点的圆在 y 轴上截得的弦长为定值。

【解析】

（1）令 A（$x_1,0$）， B（$x_2,0$），又 C（0,1）

x_1， x_2 为 $x^2+mx-2=0$ 的根

$\Delta>0$

$\begin{cases} x_1+x_2=-m \\ x_1x_2=-2 \end{cases}$ 2

假设 $AC\perp BC$ 成立，$\therefore \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

$\overrightarrow{AC}=(0-x_1,1)=(-x_1,1)$， $\overrightarrow{BC}=(0-x_2,1)=(-x_2,1)$

$\therefore \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=x_1x_2+1\neq 0$

$\therefore$ 不能出现 $AC\perp BC$ 的情况.................................4

（2）令圆与 y 轴的交点为 C（0,1）， D（$0,y_3$）

令圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 6

令 $y=0$ 得 $x^2+Dx+F=0$ 的根为 x_1， x_2

$\therefore D=m$，$F=-2$

令 $x=0$ 得 $y^2+Ey+F=0$ .... ①.................................8

点 C（0,1）在①上，$\therefore 1+E-2=0$

$\therefore E=1 \therefore y^2+y-2=0$ 解得 $y=1$ 或 $y=-2$ 10

$\therefore y_3=-2$

$\therefore$ 在 y 轴上的弦长为 3，为定值..............................12

21.设函数 $f(x)=\ln x+ax^2+(2a+1)x$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $a<0$ 时，证明 $f(x)\leq -\dfrac{3}{4a}-2$.

解：（1）由 $f(x)=\ln x+ax^2+(2a+1)x,(x>0)$

有 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+2ax+2a+1$

$=\dfrac{2ax^2+(2a+1)x+1}{x}$ 2

①当 $a=0$ 时， $f^{'}(x)=1>0, f(x)$ 单增

② 当 $a\neq 0$ 时，令 $f^{'}(x)=0$，即 $2ax^{2}+(2a+1)x+1=0$

解得 $x_1=-1(舍), x_2=-\frac{1}{2a}$ 4

$g(x)=2ax^{2}+(2a+1)x+1$

ⅰ.当 $a>0$ 时， $g(x)$ 开口向上， $-\frac{1}{2a}<0, g(x)>0$,即 $f^{'}(x)>0$， $f(x)$ 单增

ⅱ.当 $a<0$ 时， $g(x)$ 开口向上， $-\frac{1}{2a}>0$，

此时，在 $(0,-\frac{1}{2a})$ 上， $g(x)<0$，即 $f^{'}(x)<0$， $f(x)$ 单减

在 $(-\frac{1}{2a},+\infty)$ 上， $g(x)>0$，即 $f^{'}(x)>0$， $f(x)$ 单增...................................6

（2）由（1）可得： $f(x)_{\max}=f(-\frac{1}{2a})=\ln(-\frac{1}{2a})-\frac{1}{4a}-1$

故要证 $f(x)\leq -\frac{3}{4a}-2$

即证 $\ln(-\frac{1}{2a})-\frac{1}{4a}-1\leq -\frac{3}{4a}-2$ 8

即证 $\ln(-\frac{1}{2a})+\frac{1}{2a}+1\leq 0$

即证 $\ln t-t+1\leq 0(t>0)$ 10

令 $g(t)=\ln t-t+1$

则 $g^{'}(t)=\frac{1}{t}-1$

令 $g^{'}(t)\geq 0$，得 $t<1$

$\therefore g(t)_{\max}=g(1)=0$

$\therefore g(t)\leq 0$ 12

故原命题得证.

22、[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系xoy中，直线l_1与参数方程为$\begin{cases} x=2+t, \\ y=kt, \end{cases}$（$t$为参数），直线$l_2$的参数方程为$\begin{cases} x=-2+m \\ y=\dfrac{m}{k} \end{cases}$（$m$为参数），设$l_1$与$l_2$的交点为$P$，当$k$变化时，$P$的轨迹为曲线$C$.

(1) 写出C的普通方程；

(2) 以坐标原点为极点，x轴正半轴为极轴建立极坐标系，设$l_3:\rho(\cos\theta+\sin\theta)-\sqrt{2}=0$，$M$为$l_3$与$C$的交点，求$M$的极径.

【解析】<>文

【解析】（1）由已知得$l_1:y=k(x-2), l_2:y=\dfrac{1}{k}(x+2)$，

$\therefore k=\dfrac{y}{x-2}$ ，$\therefore y=\dfrac{x-2}{y}(x+2)$， 3

即$x^2-y^2=4$，即$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$. 5

（2）将$l_3:x+y-\sqrt{2}=0$代入（1）$x^2-y^2=4$中，

所以$x^2-(-\mathrm{x}+\sqrt{2})^2-4=0$，

解得$x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， 8

所以M在直角坐标系下的坐标为$(\dfrac{3\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$

由$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$得：$\rho=\sqrt{5}$.

所以M的极径为$\rho=\sqrt{5}$ 10