绝密★启封并使用完毕前

2017年普通高等学校招生全国统一考试

数学（理）（北京卷）

本试卷共5页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题　共40分）

一、选择题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）若集合 $A=\{x|-2<x<1\}$，$B=\{x|x<-1$ 或 $x>3\}$，则 $A\cap B=$

（A）$\{x|-2<x<-1\}$　　（B）$\{x|-2<x<3\}$

（C）$\{x|-1<x<1\}$　　（D）$\{x|1<x<3\}$

（2）若复数（1－i）(a+i)在复平面内对应的点在第二象限，则实数a的取值范围是

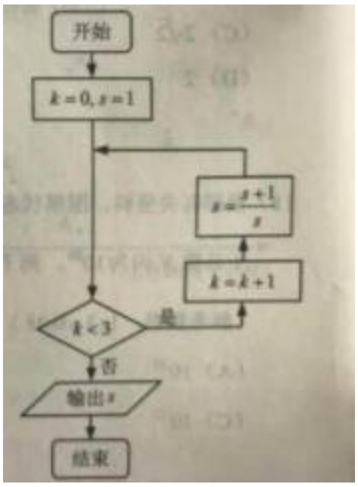
（A）$(-\infty, 1)$

（B）$(-\infty, -1)$

（C）$(1, +\infty)$

（D）$(-1, +\infty)$

（3）执行如图所示的程序框图，输出的s值为



（A）2

（B）$\frac{3}{2}$

（C）$\frac{5}{3}$

（D）$\frac{8}{5}$

（4）若 x，y 满足

$$\begin{cases} x \leqslant 3, \\ x + y \geqslant 2 \\ y \leqslant x, \end{cases}$$

，则 x + 2y 的最大值为

（A）1　　　（B）3

（C）5　　　（D）9

（5）已知函数 $f(x) = 3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x$，则 $f(x)$

（A）是奇函数，且在 R 上是增函数

（B）是偶函数，且在 R 上是增函数

（C）是奇函数，且在 R 上是减函数

（D）是偶函数，且在 R 上是减函数

（6）设 m,n 为非零向量，则“存在负数 λ，使得 $m = \lambda n$”是“$m \cdot n < 0$”的

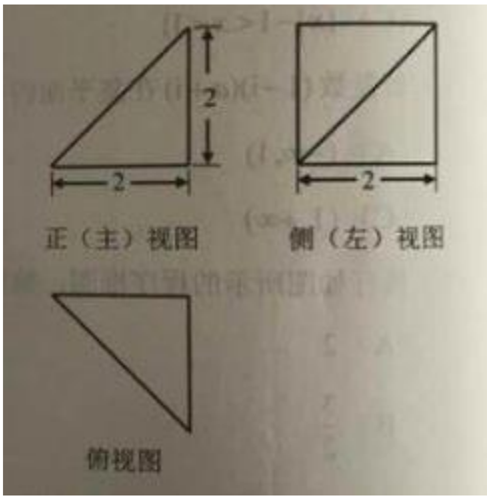
（A）充分而不必要条件

（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件

（D）既不充分也不必要条件

（7）某四棱锥的三视图如图所示，则该四棱锥的最长棱的长度为



（A）$3\sqrt{2}$

（B）$2\sqrt{3}$

（C）$2\sqrt{2}$

（D）2

（8）根据有关资料，围棋状态空间复杂度的上限 M 约为3^{361}，而可观测宇宙中普通物质的原子总数 N 约为10^{80}.则下列各数中与$\frac{M}{N}$最接近的是

（参考数据：lg3≈0.48）

（A）10^{33}　　（B）10^{53}

（C）10^{73}　　（D）10^{93}

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

（9）若双曲线$x^2-\frac{y^2}{m}=1$的离心率为$\sqrt{3}$，则实数 m=________________.

（10）若等差数列$\{a_n\}$和等比数列$\{b_n\}$满足 $a_1=b_1=-1$，$a_4=b_4=8$，则$\frac{a_2}{b_2}=$___________.

（11）在极坐标系中，点 A 在圆$\rho^2-2\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta+4=0$，点 P 的坐标为(1,0)，则|AP|的最小值为________.

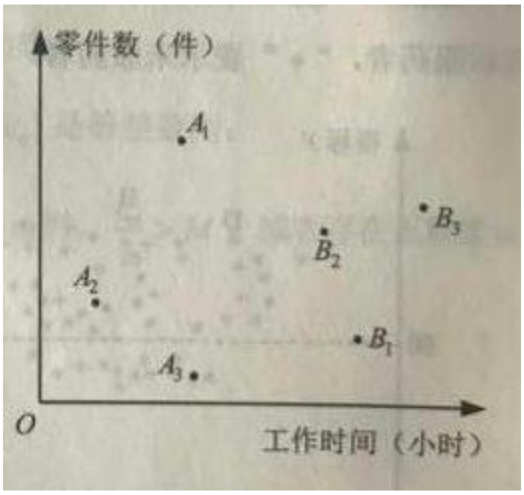
（12）在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 与角 β 均以 Ox 为始边，它们的终边关于 y 轴对称。若 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$，$\cos(\alpha-\beta)=$______.

（13）能够说明“设 a，b，c 是任意实数.若 a＞b＞c，则 a+b＞c”是假命题的一组整数 a，b，c 的值依次为______________________________.

（14）三名工人加工同一种零件，他们在一天中的工作情况如图所示，其中点 A_i 的横、纵坐标分别为第 i 名工人上午的工作时间和加工的零件数，点 B_i 的横、纵坐标学科&网分别为第 i 名工人下午的工作时间和加工的零件数，i=1，2，3。

①记 Q_1 为第 i 名工人在这一天中加工的零件总数，则 Q_1，Q_2，Q_3 中最大的是_________。

②记 p_i 为第 i 名工人在这一天中平均每小时加工的零件数，则 p_1,p_2,p_3 中最大的是_________。



三、解答题共 6 小题，共 80 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（15）（本小题 13 分）

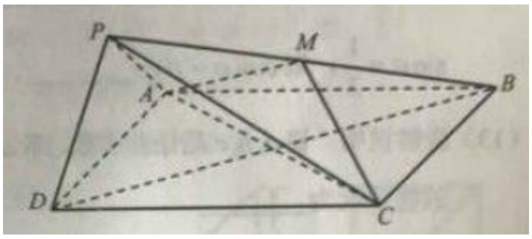
在△ABC 中，$\angle A=60°$，$c=\frac{3}{7}a$.

（Ⅰ）求 $\sin C$ 的值；

（Ⅱ）若 $a=7$,求△ABC 的面积.

（16）（本小题 14 分）

如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$，点 M 在线段 PB 上，$PD//$平面 MAC,$PA=PD=\sqrt{6}$,AB=4.



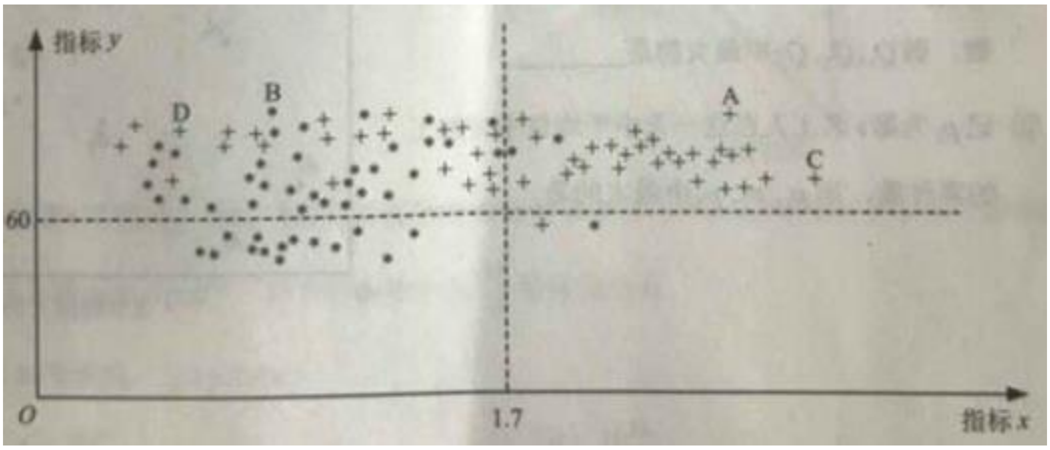
(I)求证：M 为 PB 的中点；

(II)求二面角 B-PD-A 的大小；

(III)求直线 MC 与平面 BDP 所成角的正炫值。

（17）（本小题 13 分）

为了研究一种新药的疗效，选 100 名患者随机分成两组，每组个 50 名，一组服药，另一组不服药。一段时间后，记录了两组患者的生理指标 xy 和的学科.网数据，并制成下图，其中“ •”表示服药者，“+”表示为服药者.



（Ⅰ）从服药的 50 名患者中随机选出一人，求此人指标 y 的值小于 60 的概率；

（Ⅱ）从图中 A,B,C,D,四人中随机选出两人，记ξ为选出的两人中指标 x 的值大于 1.7 的人数，求ξ的分布列和数学期望 E（ξ）；

（Ⅲ)试判断这 100 名患者中服药者指标 y 数据的方差与未服药者指标 y 数据的方差的大小.（只需写出结论）

（18）（本小题 14 分）

已知抛物线 C:$y^2=2px$ 过点 $P(1,1)$.过点$(0,\frac{1}{2})$作直线 l 与抛物线 C 交于不同的两点 M,N，过点 M 作 x 轴的垂线分别与直线 OP、ON 交于点 A,B，其中 O 为原点.

（Ⅰ）求抛物线 C 的方程，并求其焦点坐标和准线方程；

（Ⅱ）求证：A 为线段 BM 的中点.

（19）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=e^{x}\cos x-x$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上的最大值和最小值.

（20）（本小题 13 分）

设$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是两个等差数列，记

$$c_n=\max\{b_1-a_1n,b_2-a_2n,\ldots,b_n-a_nn\}(n=1,2,3,\ldots),$$

其中 $\max\{x_1,x_2,\ldots,x_s\}$表示 $x_1,x_2,\ldots,x_s$ 这 s 个数中最大的数.

（Ⅰ）若 $a_n=n$，$b_n=2n-1$，求 c_1,c_2,c_3 的值，并证明$\{c_n\}$是等差数列；

（Ⅱ）证明：或者对任意正数 M，存在正整数 m，当 $n\geq m$ 时，$\frac{c_n}{n}>M$；或者存在正整数 m，使得 $c_m,c_{m+1},c_{m+2},\ldots$是等差数列.

2017 年北京高考数学（理科）参考答案与解析

1．A

【解析】集合 $A=\{x|-2<x<1\}$ 与集合 $B=\{x|x<-1或x>3\}$ 的公共部分为 $\{x|-2<x<-1\}$，

故选 A.

2．B

【解析】$(1-i)(a+i)=(a+1)+(1-a)i$，Q 对应的点在第二象限，$\therefore \begin{cases}a+1<0\\1-a>0\end{cases}$ 解得：$a<-1$

故选 B.

3．C

【解析】当 $k=0$ 时，$k<3$ 成立，进入循环，此时 $k=1$，$s=2$；

当 $k=1$ 时，$k<3$ 成立，继续循环，此时 $k=2$，$s=\frac{3}{2}$；

当 $k=2$ 时，$k<3$ 成立，继续循环，此时 $k=3$，$s=\frac{5}{3}$；

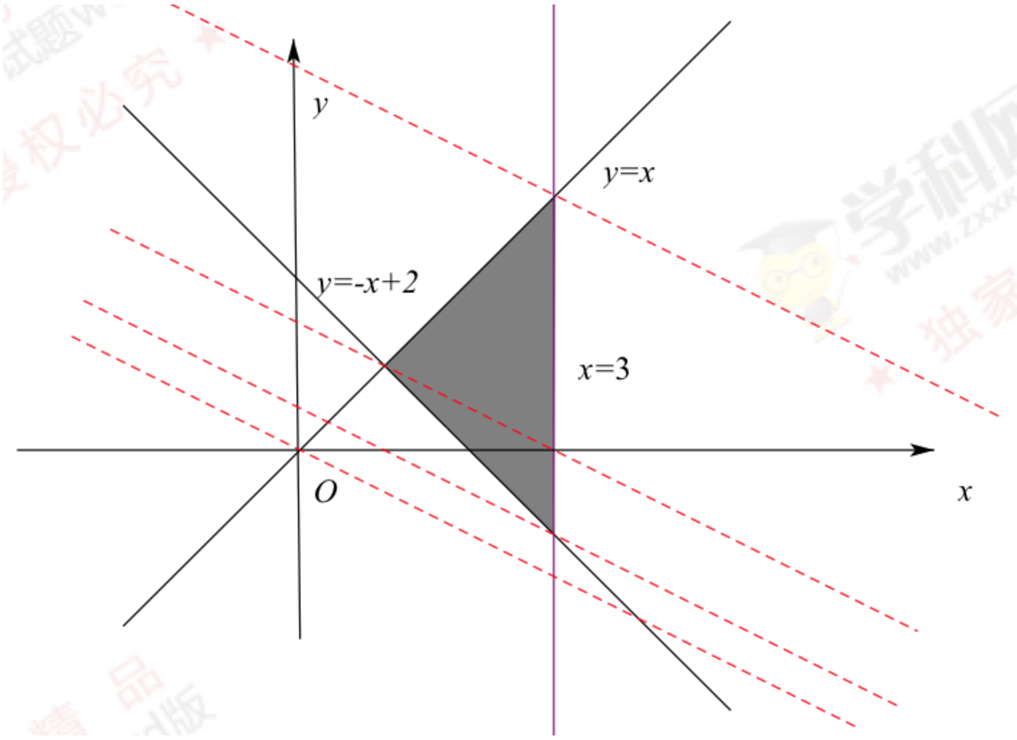
当 $k=3$ 时，$k<3$ 不成立，循环结束，输出 s.

故选 C.

4．D

【解析】设 $z=x+2y$，则 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{z}{2}$，由下图可行域分析可知，在$(3，3)$处取得最大值，

代入可得 $z_{max}=9$，故选 D.



5．A

【解析】奇偶性：$f(x)$ 的定义域是 R，关于原点对称，

由 $f(-x)=3^{-x}-\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-3^{x}=-f(x)$ 可得 $f(x)$ 为奇函数.

单调性：函数 $y=3^{x}$ 是 R 上的增函数，函数 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ 是 R 上的减函数，根据单调性的运算，增函数减去减函数所得新函数是增函数，即 $f(x)=3^{x}-\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ 是 R 上的增函数．综上选 A

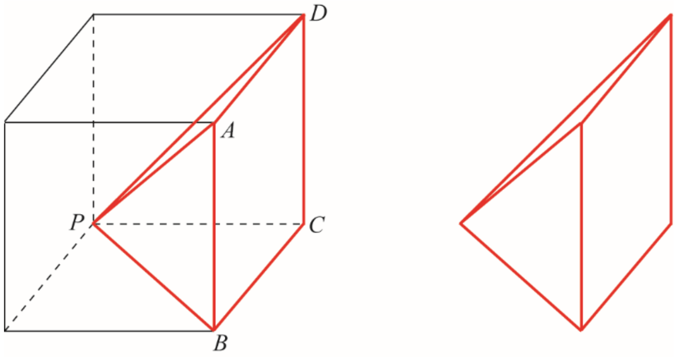
6．A

【解析】由于 $\vec{m}$，$\vec{n}$ 是非零向量，“存在负数 λ，使得 $\vec{m}=\lambda\vec{n}$．”根据向量共线基本定理可知 $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 共线，由于 $\lambda<0$，所以 $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 方向相反，从而有 $\vec{m}\cdot\vec{n}<0$，所以是充分条件。反之，若 $\vec{m}\cdot\vec{n}<0$，$\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 方向相反或夹角为钝角时，$\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 可能不共线，所以不是必要条件。综上所述，可知 $\boldsymbol{m}=\lambda\boldsymbol{n}$”是“$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}<0$”的充分不必要条件，所以选 A.

7．B

【解析】如下图所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，最长的棱为 PA，

所以 $PA=\sqrt{PC^2+AC^2}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}$，故选 B.



8．D

【解析】由于 $\lg\frac{M}{N}=\lg M-\lg N=\lg 3^{361}-\lg 10^{80}\approx 361\times 0.48-80=93.28$，

所以 $\frac{M}{N}\approx 10^{93.28}$，故选 D.

9． 2

【解析】∵双曲线的离心率为 $\sqrt{3}$

$\therefore \frac{c}{a}=\sqrt{3}$

$\therefore c^2=3a^2$

$\because a=1$，$b=\sqrt{m}$，$a^2+b^2=c^2$

$\therefore b^2=m=c^2-a^2=3a^2-a^2=3-1=2$

10． 1

【解析】$\because \{a_n\}$ 是等差数列，$a_1=-1$，$a_4=8$，

∴公差 $d=3$

$\therefore a_2=a_1+d=2$

$\because \{b_n\}$ 为等比数列，$b_1=-1$，$b_4=8$

∴公比 $q=-2$

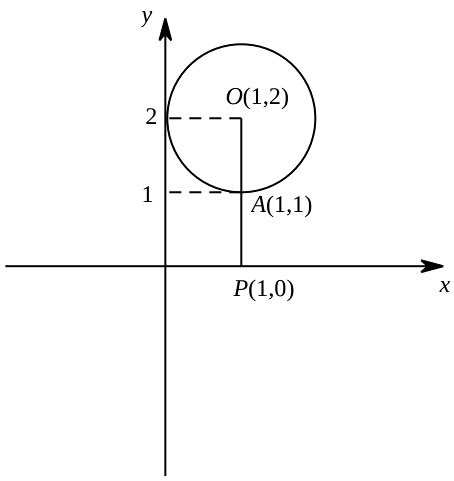
$\therefore b_2=b_1q=2$

故 $\frac{a_2}{b_2}=1$

11．1

【解析】把圆 $\rho^2-2\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta+4=0$ 改写为直角坐标方程 $x^2+y^2-2x-4y+4=0$，化

简为 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$，它是以$(1,2)$为圆心，1 为半径的圆。画出图形，连结圆心 O 与点 P，交圆于点 A，此时$|AP|$取最小值，A 点坐标为$(1,1)$，$|AP|=1$．



12．$-\frac{7}{9}$

【解析】∵因为角 α 和角 β 的终边关于 y 轴对称

∴ $\sin\alpha=\sin\beta=\frac{1}{3}$，$\cos\alpha=-\cos\beta$

∴ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$=-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=2\sin^2\alpha-1=-\frac{7}{9}$

13．-1，-2，-3

【解析】由题意知 a，b，c 均小于 0，所以找到任意一组负整数，满足题意即可．

14．① Q_1 ② p_2

【解析】①设线段 A_iB_i 的中点为 $C_i(x_i，y_i)$，则 $Q_i=2y_i$，其中 $i=1，2，3$．

因此只需比较 C_1，C_2，C_3 三个点纵坐标的大小即可．

②由题意，$p_i=\frac{y_i}{x_i}$，$i=1，2，3$，故只需比较三条直线 OC_1，OC_2，OC_3 的斜率即可．

15．

【解析】(1) Q $c=\frac{3}{7}a$

由正弦定理得：$\sin C=\frac{3}{7}\sin A=\frac{3}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$

（2）$\because c=\frac{3}{7}a<a$

$\therefore \angle C<\angle A=60^\circ$

$\therefore \angle C$ 为锐角

由 $\sin C=\frac{3\sqrt{3}}{14}$ 得： $\cos C=\frac{13}{14}$

$$\therefore \sin B=\sin[\pi-(A+C)]=\sin(A+C)$$
$$=\sin A\cos C+\cos A\sin C$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{13}{14}+\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{14}$$
$$=\frac{4\sqrt{3}}{7}$$

又 $\because c=\frac{3}{7}a=\frac{3}{7}\times 7=3$

$$\therefore S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B$$
$$=\frac{1}{2}\times 7\times 3\times\frac{4\sqrt{3}}{7}$$
$$=6\sqrt{3}$$

16.

【解析】（1）取 AC 、 BD 交点为 N ，连结 MN .

$\because PD\,/\!/$ 面 MAC

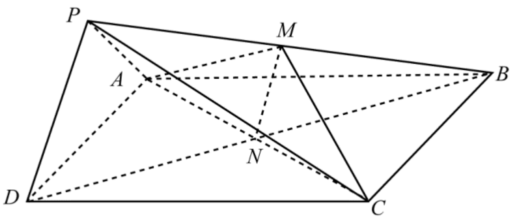
$PD\subset$ 面 PBD

面 $PBD\cap$ 面 $MAC=MN$

$\therefore PD\,/\!/\,MN$

在 $\triangle PBD$ 中， N 为 BD 中点

$\therefore M$ 为 PB 中点



（2）方法一：

取 AD 中点为 O ， BC 中点为 E ，连结 OP ， OE

$\because PA=PD$ ， $\therefore PO\perp AD$

又面 $PAD\perp$ 面 $ABCD$

面 $PAD\cap$ 面 $ABCD=AD$

$\therefore PO\perp$ 面 $ABCD$

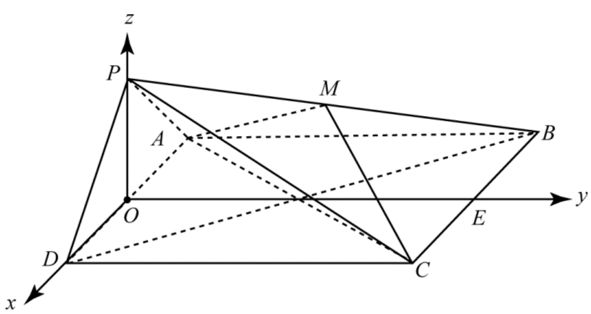
以 OD 为 x 轴， OE 为 y 轴， OP 为 z 轴建立空间直角坐标

可知 $D(2，0，0)$ ， $A(-2，0，0)$ ， $B(-2，4，0)$ ， $P(0，0，\sqrt{2})$

易知面 PD 的法向量为 $\vec{m}=(0，1，0)$

且 $\overrightarrow{PD}=(2，0，-\sqrt{2})$ ， $\overrightarrow{PB}=(-2，4，-\sqrt{2})$

设面 PBD 的法向量为 $\vec{n}=(x，y，z)$



$$\begin{cases}2x-\sqrt{2}z=0\\-2x+4y-\sqrt{2}z=0\end{cases}$$

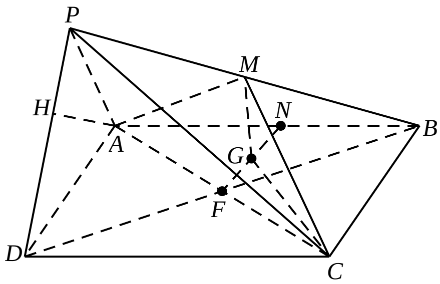
可知$\vec{n}=\left(1,1,\sqrt{2}\right)$

$$\therefore \left|\cos<\vec{m},\vec{n}>\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{1^2}\times\sqrt{1^2+1^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}}\right|=\frac{1}{2}$$

由图可知二面角的平面角为锐角

∴二面角$B-PD-A$大小为$60°$

方法二:



过点A作$AH\perp PD$，交PD于点E，连结BE

∵$BA\perp$平面PAD，∴$PD\perp BA$，

∴$PD\perp$平面BAH，∴$PD\perp BH$，

∴$\angle AEB$即为二面角$B-PD-A$的平面角

$AD\cdot PO=AE\cdot PD$，可求得$AE=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

$$\tan\angle AEB=\frac{4}{\frac{4\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3}$$

∴$\angle AEB=60°$

（3）方法一:

点$M\left(-1,2,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$C\left(2,4,0\right)$

$$\therefore \overrightarrow{MC}=\left(3,2,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

由（2）题面BDP的一个法向量$\vec{n}=\left(1,1,\sqrt{2}\right)$

设MC与平面BDP所成角为θ

$$\therefore \sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{MC},\vec{n}>\right|=\left|\frac{3+2-1}{\sqrt{9+4+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{1^2+1^2+(\sqrt{2})^2}}\right|=\frac{2\sqrt{6}}{9}$$

方法二:

记$AC\cap BD=F$，取AB中点N，连结MN，FN，MF

取FN中点G，连MG，易证点G是FN中点，∴$MG // PO$

∵平面$PAD\perp$平面$ABCD$，$PO\perp AD$，

∴$PO\perp$平面$ABCD$

∴$MG\perp$平面$ABCD$

连结GC，$GC=\sqrt{13}$，$MG=\frac{1}{2}PO=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore MC=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$

$\because PD=\sqrt{6}$，$BD=4\sqrt{2}$，$PB=\sqrt{22}$，由余弦定理知 $\cos\angle PDB=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \sin\angle PDB=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$\therefore S_{\triangle PDB}=\dfrac{1}{2}PD\cdot DB\cdot\sin\angle PDB=4\sqrt{2}$

设点 C 到平面 PDB 的距离为 h，

$V_{P-DBC}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle PDB}\cdot h$

又 $V_{P-DBC}=V_{C-PDB}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot PO$，求得 $h=2$

记直线 MC 与平面 BDP 所成角为 θ

$\therefore \sin\theta=\dfrac{h}{|MC|}=\dfrac{2}{\frac{3\sqrt{6}}{2}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{9}$

17.

【解析】(1) 50 名服药者中指标 y 的值小于 60 的人有 15 人，故随机抽取 1 人，此人指标 y 的值小于 60 的概率为 $\dfrac{15}{50}=\dfrac{3}{10}$

(2) ξ 的可能取值为：0，1，2

$P(\xi=0)=\dfrac{C_2^2}{C_4^2}=\dfrac{1}{6}$，$P(\xi=1)=\dfrac{C_2^1\cdot C_2^1}{C_4^2}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$，$P(\xi=2)=\dfrac{C_2^2}{C_4^2}=\dfrac{1}{6}$

ξ	0	1	2
P	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{1}{6}$

$E(\xi)=0\times\dfrac{1}{6}+1\times\dfrac{2}{3}+2\times\dfrac{1}{6}=1$

(3) 从图中服药者和未服药者指标 y 数据的离散程度观察可知，服药者的方差大。

18.

【解析】(1) 由抛物线 $y^2=2px$ 过点 $(1,1)$，代入原方程得 $1^2=2p\times1$，

所以 $p=\dfrac{1}{2}$，原方程为 $y^2=x$.

由此得抛物线焦点为 $\left(\dfrac{1}{4},0\right)$，准线方程为 $x=-\dfrac{1}{4}$.

(2)

法一：

$\because BM\perp x$ 轴

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$A(x_1,y_A),B(x_1,y_B)$，根据题意显然有 $x_1\neq0$

若要证 A 为 BM 中点

只需证$2y_A=y_B+y_M$即可，左右同除x_1有$\frac{2y_A}{x_1}=\frac{y_B}{x_1}+\frac{y_M}{x_1}$

即只需证明$2k_{OA}=k_{OB}+k_{OM}$成立

其中$k_{OA}=k_{OP}=1,k_{OB}=k_{ON}$

当直线MN斜率不存在或斜率为零时，显然与抛物线只有一个交点不满足题意，

所以直线MN斜率存在且不为零.

设直线MN：$y=kx+\frac{1}{2}\left(k\neq 0\right)$

联立$\begin{cases} y=kx+\frac{1}{2} \\ y^2=x \end{cases}$有$k^2x^2+\left(k-1\right)x+\frac{1}{4}=0$，

考虑$\Delta=\left(k-1\right)^2-4\times\frac{1}{4}\times k^2=1-2k$，由题可知有两交点，所以判别式大于零，所以$k<\frac{1}{2}$.

由韦达定理可知：$x_1+x_2=\frac{1-k}{k^2}$……①，　　$x_1x_2=\frac{1}{4k^2}$……②

$k_{OB}+k_{OM}=k_{ON}+k_{OM}=\frac{y_2}{x_2}+\frac{y_1}{x_1}$

$=\frac{kx_2+\frac{1}{2}}{x_2}+\frac{kx_1+\frac{1}{2}}{x_1}=2k+\frac{x_1+x_2}{2x_1x_2}$

将①②代入上式，有$2k+\frac{x_1+x_2}{2x_1x_2}=2k+\frac{\frac{1-k}{k^2}}{2\times\frac{1}{4k^2}}=2k+2\left(1-k\right)=2$

即$k_{ON}+k_{OM}=k_{OB}+k_{OM}=2=2k_{OA}$，所以$2y_A=y_B+y_M$恒成立

$\therefore$ A为BM中点，得证.

法二：

当直线MN斜率不存在或斜率为零时，显然与抛物线只有一个交点不满足题意，

所以直线MN斜率存在且不为零.

设$\left(0,\frac{1}{2}\right)$为点　，过$Q$的直线$MN$方程为$y=kx+\frac{1}{2}\left(k\neq 0\right)$，设$M(x_1,y_1)N(x_2,y_2)$　，

显然，x_1,x_2均不为零.

联立方程$\begin{cases} y^2 = x \\ y = kx + \dfrac{1}{2} \end{cases}$得$k^2x^2 + (k-1)x + \dfrac{1}{4} = 0$，

考虑 ，由题可知有两交点，所以判别式大于零，所以$k < \dfrac{1}{2}$.

由韦达定理可知：$x_1 + x_2 = \dfrac{1-k}{k^2}$……①， ……②

由题可得A,B横坐标相等且同为x_1，且$l_{ON}: y = \dfrac{y_2}{x_2}x$，$B$在直线$ON$上，

又A在直线OP：$y = x$上，所以$A(x_1, x_1), B\left(x_1, \dfrac{x_1y_2}{x_2}\right)$，若要证明$A$为$BM$中点，

只需证$2y_A = y_B + y_M$，即证$\dfrac{x_1y_2}{x_2} + y_1 = 2x_1$，即证$x_1y_2 + x_2y_1 = 2x_1x_2$，

将$\begin{cases} y_1 = kx_1 + \dfrac{1}{2} \\ y_2 = kx_2 + \dfrac{1}{2} \end{cases}$代入上式，

即证$(kx_2 + \dfrac{1}{2})x_1 + (kx_1 + \dfrac{1}{2})x_2 = 2x_1x_2$，即$(2k-2)x_1x_2 + \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2) = 0$，

将①②代入得$(2k-2)\dfrac{1}{4k^2} + \dfrac{1-k}{2k^2} = 0$，化简有 恒成立，

所以$2y_A = y_B + y_M$恒成立，

所以A为BM中点.

19.

【解析】（1）$\because f(x) = e^x\cos x - x$

$\therefore f(0) = 1, f'(x) = e^x\cos x - e^x\sin x - 1 = e^x(\cos x - \sin x) - 1$

$\therefore f'(0) = e^0(\cos 0 - \sin 0) - 1 = 0$

$\therefore f(x)$在$(0, f(0))$处的切线方程为$y - f(0) = f'(0)(x-0)$，即$y - 1 = 0$.

（2）令$g(x) = f'(x) = e^x(\cos x - \sin x) - 1$

$g'(x) = e^x(\cos x - \sin x) + e^x(-\sin x - \cos x) = -2e^x\sin x$

$\because x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$时，$g'(x) = -2e^x\sin x < 0$

$\therefore g(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减

$\therefore x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时，$g(x) < g(0) = f'(0) = 0$，即 $f'(x) < 0$

$\therefore f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减

$\therefore x = 0$ 时，$f(x)$ 有最大值 $f(0) = 1$；

$x = \frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)$ 有最小值 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$.

20.

【解析】(1) 易知 $a_1 = 1$，$a_2 = 2$，$a_3 = 3$ 且 $b_1 = 1$，$b_2 = 3$，$b_3 = 5$.

$\therefore c_1 = b_1 - a_1 = 0$，

$c_2 = \max\{b_1 - 2a_1, b_2 - 2a_2\} = \max\{-1, -1\} = -1$，

$c_3 = \max\{b_1 - 3a_1, b_2 - 3a_2, b_3 - 3a_3\} = \max\{-2, -3, -4\} = -2$.

下面我们证明，对 $\forall n \in \mathbf{N}^*$ 且 $n \geqslant 2$，都有 $c_n = b_1 - a_1 \cdot n$.

当 $k \in \mathbf{N}^*$ 且 $2 \leqslant k \leqslant n$ 时，

$(b_k - a_k \cdot n) - (b_1 - a_1 \cdot n)$

$= \left[(2k-1) - nk\right] - 1 + n$

$= (2k-2) - n(k-1)$

$= (k-1)(2-n)$

$\because k - 1 > 0$ 且 $2 - n \leqslant 0$，

$\therefore (b_k - a_k \cdot n) - (b_1 - a_1 \cdot n) \leqslant 0 \Rightarrow b_1 - a_1 \cdot n \geqslant b_k - a_k \cdot n$.

因此，对 $\forall n \in \mathbf{N}^*$ 且 $n \geqslant 2$，$c_n = b_1 - a_1 \cdot n = 1 - n$，则 $c_{n+1} - c_n = -1$.

又 $\because c_2 - c_1 = -1$，

故 $c_{n+1} - c_n = -1$ 对 $\forall n \in \mathbf{N}^*$ 均成立，从而 $\{c_n\}$ 为等差数列.

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的公差分别为 d_a，d_b，下面我们考虑 c_n 的取值.

对 $b_1 - a_1 \cdot n$，$b_2 - a_2 \cdot n$，$\cdots$，$b_n - a_n \cdot n$，

考虑其中任意项 $b_i-a_i\cdot n$（$i\in\mathbf{N}^*$ 且 $1\leqslant i\leqslant n$），

$b_i-a_i\cdot n$

$=\left[b_1+(i-1)d_b\right]-\left[a_1+(i-1)d_a\right]\cdot n$

$=(b_1-a_1\cdot n)+(i-1)(d_b-d_a\cdot n)$

下面我们分 $d_a=0$，$d_a>0$，$d_a<0$ 三种情况进行讨论.

（1）若 $d_a=0$，则 $b_i-a_i\cdot n=(b_1-a_1\cdot n)+(i-1)\cdot d_b$

①若 $d_b\leqslant 0$，则 $(b_i-a_i\cdot n)-(b_1-a_1\cdot n)=(i-1)\cdot d_b\leqslant 0$

则对于给定的正整数 n 而言，$c_n=b_1-a_1\cdot n$

此时 $c_{n+1}-c_n=-a_1$，故 $\{c_n\}$ 为等差数列.

②若 $d_b>0$，则 $(b_i-a_i\cdot n)-(b_n-a_n\cdot n)=(i-n)\cdot d_b\leqslant 0$

则对于给定的正整数 n 而言，$c_n=b_n-a_n\cdot n=b_n-a_1\cdot n$.

此时 $c_{n+1}-c_n=d_b-a_1$，故 $\{c_n\}$ 为等差数列.

此时取 $m=1$，则 c_1，c_2，c_3，L 是等差数列，命题成立.

（2）若 $d_a>0$，则此时 $-d_a\cdot n+d_b$ 为一个关于 n 的一次项系数为负数的一次函数.

故必存在 $m\in\mathbf{N}^*$，使得当 $n\geqslant m$ 时，$-d_a\cdot n+d_b<0$

则当 $n\geqslant m$ 时，$(b_i-a_i\cdot n)-(b_1-a_1\cdot n)=(i-1)(-d_a\cdot n+d_b)\leqslant 0$（$i\in\mathbf{N}^*$，$1\leqslant i\leqslant n$）.

因此，当 $n\geqslant m$ 时，$c_n=b_1-a_1\cdot n$.

此时 $c_{n+1}-c_n=-a_1$，故 $\{c_n\}$ 从第 m 项开始为等差数列，命题成立.

（3）若 $d_a<0$，则此时 $-d_a\cdot n+d_b$ 为一个关于 n 的一次项系数为正数的一次函数.

故必存在 $s\in\mathbf{N}^*$，使得当 $n\geqslant s$ 时，$-d_a\cdot n+d_b>0$

则当 $n \geqslant s$ 时，$(b_i - a_i \cdot n) - (b_n - a_n \cdot n) = (i - n)(-d_a \cdot n + d_b) \leqslant 0$（$i \in \mathbf{N}^*$，$1 \leqslant i \leqslant n$）

因此，当 $n \geqslant s$ 时，$c_n = b_n - a_n \cdot n$.

此时 $\dfrac{c_n}{n}$

$= \dfrac{b_n - a_n \cdot n}{n}$

$= -a_n + \dfrac{b_n}{n}$

$= -d_a \cdot n + (d_a - a_1 + d_b) + \dfrac{b_1 - d_b}{n}$

令 $-d_a = A > 0$，$d_a - a_1 + d_b = B$，$b_1 - d_b = C$

下面证明 $\dfrac{c_n}{n} = An + B + \dfrac{C}{n}$ 对任意正数 M，存在正整数 m，使得当 $n \geqslant m$ 时，$\dfrac{c_n}{n} > M$.

①若 $C \geqslant 0$，则取 $m = \left[\dfrac{|M - B|}{A}\right] + 1$（$[x]$ 表示不大于 x 的最大整数）

当 $n \geqslant m$ 时，

$\dfrac{c_n}{n} \geqslant An + B \geqslant Am + B = A\left(\left[\dfrac{|M - B|}{A}\right] + 1\right) + B > A \cdot \dfrac{M - B}{A} + B = M$，

此时命题成立.

②若 $C < 0$，则取 $m = \left[\dfrac{|M - C - B|}{A}\right] + 1$

当 $n \geqslant m$ 时，

$\dfrac{c_n}{n} \geqslant An + B + C \geqslant Am + B + C > A \cdot \dfrac{|M - C - B|}{A} + B + C \geqslant M - C - B + B + C = M$.

此时命题也成立.

因此，对任意正数 M，存在正整数 m，使得当 $n \geqslant m$ 时，$\dfrac{c_n}{n} > M$.

综合以上三种情况，命题得证.