

全国二——理科数学

2018 年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学

本试卷共 23 题，共 150 分，共 5 页。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. $\frac{1+2i}{1-2i} =$

A. $-\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$

B. $-\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$

C. $-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$

D. $-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$

2. 已知集合 $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 3, x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\}$ ，则 A 中元素的个数为

A. 9

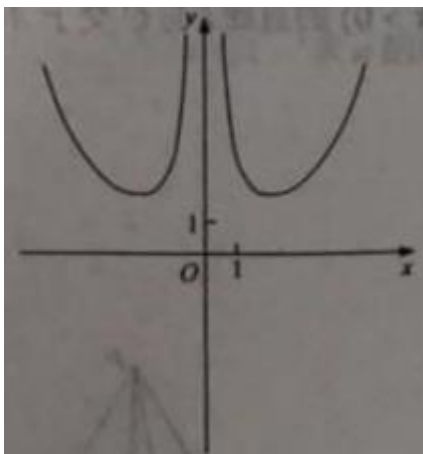
B. 8

C. 5

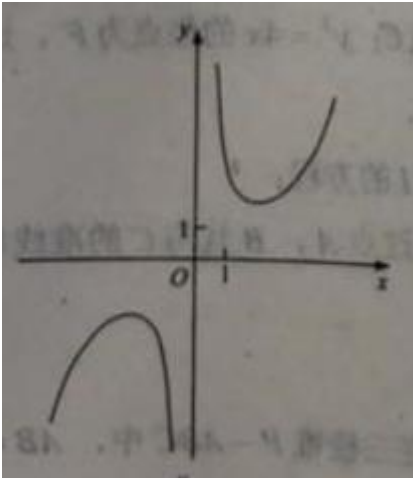
D. 4

3. 函数 $f(x) = e^2 - e^{-x}/x^2$ 的图像大致为

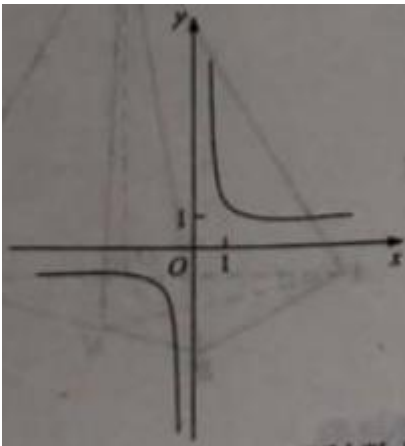
A.



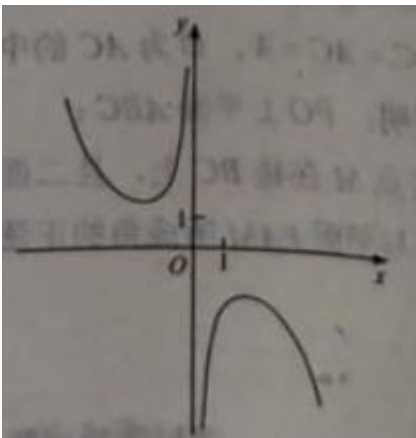
B.



C.



D.



4. 已知向量 a, b 满足 $|a| = 1, a \cdot b = -1$, 则 $a \cdot (2a - b) =$

- A. 4
- B. 3
- C. 2
- D. 0

5. 双曲线 $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 $\sqrt{3}$, 则其渐近线方程为

- A. $y = \pm \sqrt{2}x$
- B. $y = \pm \sqrt{3}x$
- C. $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$
- D. $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x$

6. 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos \frac{C}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}, BC = 1, AC = 5$, 则 $AB =$

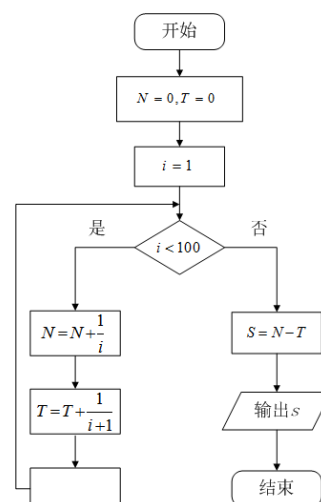
- A. $\sqrt{2}$
- B. $\sqrt{30}$
- C. $\sqrt{29}$
- D. $2\sqrt{5}$

7. 为计算 $s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$, 设计了右侧的程序框图, 则在空白框中应填入

入

- A. $i = i + 1$
- B. $i = i + 2$
- C. $i = i + 3$
- D. $i = i + 4$

3 / 8



8. 我国数学家陈景润在哥德巴赫猜想的研究中取得了世界领先的成果。哥德巴赫猜想是“每个大于 2 的偶数可以表示为两个素数的和”，如 $30=7+23$ ，在不超过 30 的素数中，随机选取两个不同的数，其和等于 30 的概率是

- A. $\frac{1}{12}$
- B. $\frac{1}{14}$
- C. $\frac{1}{15}$
- D. $\frac{1}{18}$

9. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=BC=1$ ， $AA_1= \sqrt{3}$ ，则异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角的余弦值为

- A. $\frac{1}{5}$
- B. $\frac{\sqrt{5}}{6}$
- C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$
- D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

10. 若 $f(x) = \cos x - \sin x$ 在 $[-a, a]$ 是减函数，则 a 的最大值是

- A. $\frac{x}{4}$
- B. $\frac{\pi}{2}$
- C. $\frac{3\pi}{4}$
- D. π

11. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的奇函数，满足 $f(1-x) = f(1+x)$ 。若 $f(1) = 2$ ，则 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(50) =$

- A.-50
- B.0
- C.2
- D.50

12. 已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, A 是 C 的左顶点, 点 P 在过 A 且斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 的直线上, $\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形, $\angle F_1F_2P = 120^\circ$, 则 C 的离心率为

- A. $\frac{2}{3}$
- B. $\frac{1}{2}$
- C. $\frac{1}{3}$
- D. $\frac{1}{4}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 曲线 $y = 2\ln(x+1)$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为_____。

14. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + 2y - 5 \geq 0, \\ x - 2y + 3 \geq 0, \\ x - 5 \leq 0, \end{cases}$ 则 $z = x + y$ 的最大值为_____。

15. 已知 $\sin \alpha + \cos \beta = 1, \cos \alpha + \sin \beta = 0$, 则 $\sin(\alpha + \beta) =$ _____。

16. 已知圆锥的顶点为 S , 母线 SA, SB 所成角的余弦值为 $\frac{7}{8}$, SA 与圆锥底面所成角为 45° , 若 $\triangle SAB$ 的面积为 $5\sqrt{15}$, 则该圆锥的侧面积为_____。

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答。

(一) 必考题: 共 60 分。

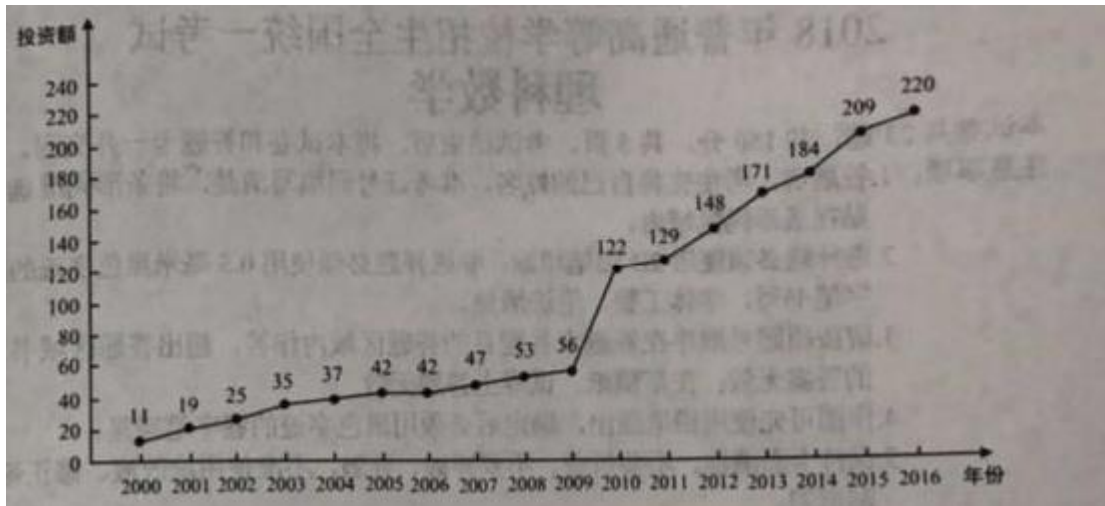
17. (12 分)

记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1 = -7, S_1 = -15$ 。

- (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 求 S_n , 并求 S_n 的最小值。

18. (12分)

下图是某地区 2000 年至 2016 年环境基础设施投资额 y (单位: 亿元) 的折线图



为了预测该地区 2018 年的环境基础设施投资额, 建立了 y 与时间变量 t 的两个线性回归模型。根据 2000 年至 2016 年的数据 (时间变量 t 的值依次为 1, 2, ..., 17) 建立模型①:

$\hat{y} = -30.4 + 13.5t$; 根据 2010 年至 2016 年的数据 (时间变量 t 的值依次为 1, 2, ..., 7) 建立模型②: $\hat{y} = 99 + 17.5t$ 。

- (1) 分别利用这两个模型, 求该地区 2018 年的环境基础设施投资额的预测值;
- (2) 你认为用哪个模型得到的预测值更可靠? 并说明理由。

19. (12分)

设抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 过 F 且斜率为 k ($k > 0$) 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, $|AB| = 8$ 。

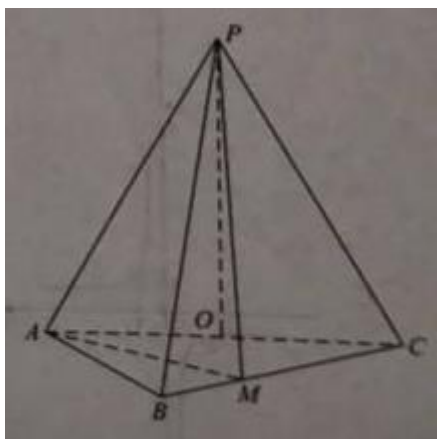
- (1) 求 l 的方程;
- (2) 求过点 A, B 且与 C 的准线相切的圆的方程。

20. (12分)

如图，在三棱锥 P-ABC 中， $AB=BC=2\sqrt{2}$ ， $PA=PB=PC=AC=4$ ，O 为 AC 的中点。

(1) 证明： $PO \perp$ 平面 ABC；

(2) 若点 M 在棱 BC 上，且二面角 M-PA-C 为 30° ，求 PC 与平面 PAM 所成角的正弦值。



21、(12 分)

已知函数 $f(x) = e^x - ax^2$ 。

(1) 若 $a=1$ ，证明：当 $x \geq 0$ 时， $f(x) \geq 1$ ；

(2) 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点，求 a 。

(二) 选考题：共 10 分，请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22、[选修 4-4：坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2\cos\theta, \\ y = 4\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数)，直线 l 的参

数方程为， $\begin{cases} x = 1 + t \cos \alpha \\ y = 2 + t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数)。

(1) 求 C 和 l 的直角坐标方程；

(2) 若曲线 C 截直线 l 所得线段的中点坐标为 $(1, 2)$ ，求 l 的斜率。

23：[选修 4-5：不等式选讲] (10 分)

设函数 $f(x) = 5 - |x+a| - |x-2|$ 。

- (1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 0$ 的解集;
- (2) 若 $f(x) \leq 1$ 时, 求 a 的取值范围。