2018 年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学（文史类）

本试卷分为第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，共 150 分，考试用时 120 分钟。第Ⅰ卷 1 至 2 页，第Ⅱ卷 3 至 5 页。

答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题考上，并在规定位置粘贴考试用条形码。答卷时，考生务必将答案涂写在答题卡上，答在试卷上的无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

祝各位考生考试顺利！

第Ⅰ卷

注意事项：

1．每小题选出答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。

2．本卷共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

参考公式：

• 如果事件 A，B 互斥，那么 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

• 棱柱的体积公式 $V=Sh$. 其中 S 表示棱柱的底面面积，h 表示棱柱的高.

• 棱锥的体积公式 $V=\frac{1}{3}Sh$，其中 S 表示棱锥的底面积，h 表示棱锥的高.

一．选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

（1）设集合 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{-1,0,2,3\}$，$C=\{x\in\mathbf{R}\mid -1\le x<2\}$，则 $(A\cup B)\cap C=$

（A）$\{-1,1\}$　　（B）$\{0,1\}$

（C）$\{-1,0,1\}$　　（D）$\{2,3,4\}$

（2）设变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\le 5,\\ 2x-y\le 4,\\ -x+y\le 1,\\ y\ge 0,\end{cases}$ 则目标函数 $z=3x+5y$ 的最大值为

（A）6　　（B）19

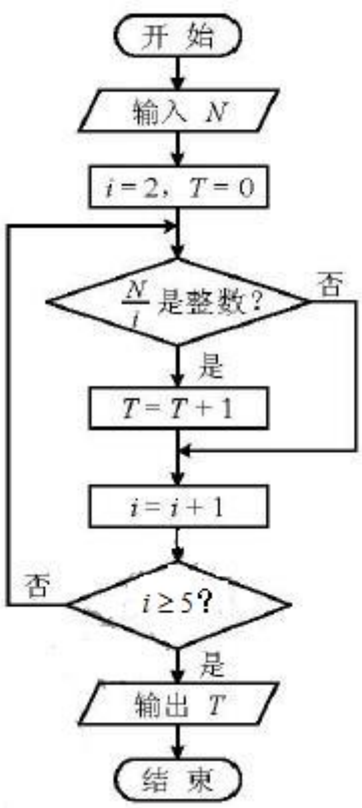
（C）21　　　　　　　　　　　　（D）45

（3）设 $x \in \mathbf{R}$，则“$x^3 > 8$”是“$|x| > 2$”的

（A）充分而不必要条件　　　　　（B）必要而不充分条件

（C）充要条件　　　　　　　　　（D）既不充分也不必要条件

（4）阅读如图所示的程序框图，运行相应的程序，若输入 N 的值为 20，则输出 T 的值为



（A）1　　　　（B）2　　　　（C）3　　　　（D）4

（5）已知 $a = \log_3 \frac{7}{2}, b = (\frac{1}{4})^{\frac{1}{3}}, c = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{5}$，则 a,b,c 的大小关系为

（A）$a > b > c$　　（B）$b > a > c$　　（C）$c > b > a$　　（D）$c > a > b$

（6）将函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{5})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度，所得图象对应的函数

（A）在区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上单调递增　　（B）在区间 $[\frac{\pi}{4}, 0]$ 上单调递减

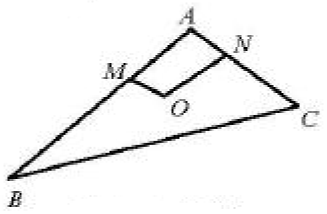
（C）在区间 $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增　　（D）在区间 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上单调递减

（7）已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 2，过右焦点且垂直于 x 轴的直线与双曲线交于 A,B 两点.设 A,B 到双曲线的同一条渐近线的距离分别为 d_1 和 d_2，且 $d_1+d_2=6$，则双曲线的方程为

（A）$\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{9}=1$　　（B）$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{3}=1$

（C）$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$　　（D）$\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{4}=1$

（8）在如图的平面图形中，已知 $OM=1.ON=2,\angle MON=120^{\circ},\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA},\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{NA},$ 则 $\overrightarrow{BC}\ \overrightarrow{OM}$ 的值为



（A）-15　　（B）-9

（C）-6　　（D）0

第Ⅱ卷

注意事项：

1．用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上。

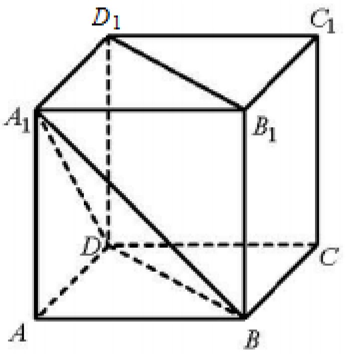
2．本卷共 12 小题，共 110 分。

二．填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

（9）i 是虚数单位，复数 $\dfrac{6+7i}{1+2i}=$__________.

（10）已知函数 $f(x)=e^x\ln x$，$f'(x)$为 $f(x)$的导函数，则 f'（1）的值为__________.

（11）如图，已知正方体 $ABCD–A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，则四棱柱 $A_1–BB_1D_1D$ 的体积为__________.



第（11）题图

（12）在平面直角坐标系中，经过三点（0，0），（1，1），（2，0）的圆的方程为__________.

（13）已知 a，b∈**R**，且 a–3b+6=0，则 $2^a+\dfrac{1}{8^b}$ 的最小值为__________.

（14）已知 a∈**R**，函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+a-2, & x\le 0,\\ -x^2+2x-2a, & x>0.\end{cases}$ 若对任意 x∈［–3，+∞），$f(x)\le|x|$ 恒成立，则 a 的取值范围是__________.

三．解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

（15）（本小题满分 13 分）

已知某校甲、乙、丙三个年级的学生志愿者人数分别为 240，160，160．现采用分层抽样的方法从中抽取 7 名同学去某敬老院参加献爱心活动．

（I）应从甲、乙、丙三个年级的学生志愿者中分别抽取多少人？

（Ⅱ）设抽出的 7 名同学分别用 A，B，C，D，E，F，G 表示，现从中随机抽取 2 名同学承担敬老院的卫生工作．

（i）试用所给字母列举出所有可能的抽取结果；

（ii）设 M 为事件“抽取的 2 名同学来自同一年级”，求事件 M 发生的概率．

（16）（本小题满分 13 分）

在△ABC 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a,b,c．已知 $b\sin A=a\cos(B-\dfrac{\pi}{6})$.

（I）求教 B 的大小；

（Ⅱ）设 a=2，c=3，求 b 和 $\sin(2A-B)$的值．

（17）（本小题满分 13 分）

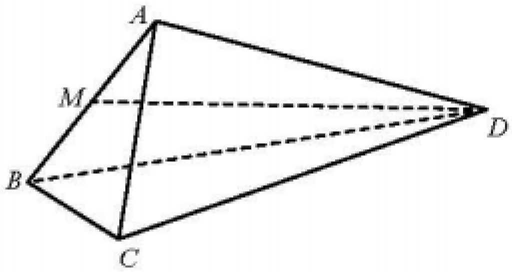
如图，在四面体 $ABCD$ 中，△ABC 是等边三角形，平面 ABC⊥平面 ABD，点 M 为棱 AB 的

中点，AB=2，$AD=2\sqrt{3}$，$\angle BAD$=90°．

（I）求证：$AD\perp BC$；

（II）求异面直线 BC 与 MD 所成角的余弦值；

（III）求直线 CD 与平面 ABD 所成角的正弦值．



（18）（本小题满分 13 分）

设$\{a_n\}$是等差数列，其前 n 项和为 S_n（$n\in\mathbf{N}^*$）；$\{b_n\}$是等比数列，公比大于 0，其前 n 项和为 T_n（$n\in\mathbf{N}^*$）．已知 $b_1=1$，$b_3=b_2+2$，$b_4=a_3+a_5$，$b_5=a_4+2a_6$．

（I）求 S_n 和 T_n；

（II）若 $S_n+(T_1+T_2+\cdots+T_n)=a_n+4b_n$，求正整数 n 的值．

（19）（本小题满分 14 分）

设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右顶点为 A，上顶点为 B.已知椭圆的离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，$|AB|=\sqrt{13}$.

（I）求椭圆的方程；

（II）设直线 $l:y=kx(k<0)$ 与椭圆交于 P,Q 两点，l 与直线 AB 交于点 M，且点 P，M 均在第四象限.若△BPM 的面积是△BPQ 面积的 2 倍，求 k 的值.

（20）（本小题满分 14 分）

设函数 $f(x)=(x-t_1)(x-t_2)(x-t_3)$，其中 $t_1,t_2,t_3\in\mathbf{R}$，且 t_1,t_2,t_3 是公差为 d 的等差数列.

（I）若 $t_2=0,d=1$，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（II）若 $d=3$，求 $f(x)$ 的极值；

（III）若曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=-(x_1-t_2)-6\sqrt{3}$ 有三个互异的公共点，求 d 的取值范

围.

参考答案

一、选择题：本题考查基本知识和基本运算．每小题 5 分，满分 40 分．

（1）C　　（2）C　　（3）A　　（4）B

（5）D　　（6）A　　（7）A　　（8）C

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算．每小题 5 分，满分 30 分．

（9）$4-i$　　（10）e　　（11）$\frac{1}{3}$

（12）$x^2+y^2-2x=0$　　（13）$\frac{1}{4}$　　（14）$[\frac{1}{8}，2]$

三、解答题

（15）本小题主要考查随机抽样、用列举法计算随机事件所含的基本事件数、古典概型及其概率计算公式等基本知识．考查运用概率知识解决简单实际问题的能力．满分 13 分．

（Ⅰ）解：由已知，甲、乙、丙三个年级的学生志愿者人数之比为 3∶2∶2，由于采用分层抽样的方法从中抽取 7 名同学，因此应从甲、乙、丙三个年级的学生志愿者中分别抽取 3 人，2 人，2 人．

（Ⅱ）（i）解：从抽出的 7 名同学中随机抽取 2 名同学的所有可能结果为

$\{A，B\}$，$\{A，C\}$，$\{A，D\}$，$\{A，E\}$，$\{A，F\}$，$\{A，G\}$，$\{B，C\}$，$\{B，D\}$，$\{B，E\}$，$\{B，F\}$，$\{B，G\}$，$\{C，D\}$，$\{C，E\}$，$\{C，F\}$，$\{C，G\}$，$\{D，E\}$，$\{D，F\}$，$\{D，G\}$，$\{E，F\}$，$\{E，G\}$，$\{F，G\}$，共 21 种．

（ii）解：由（Ⅰ），不妨设抽出的 7 名同学中，来自甲年级的是 A，B，C，来自乙年级的是 D，E，来自丙年级的是 F，G，则从抽出的 7 名同学中随机抽取的 2 名同学来自同一年级的所有可能结果为$\{A，B\}$，$\{A，C\}$，$\{B，C\}$，$\{D，E\}$，$\{F，G\}$，共 5 种．

所以，事件 M 发生的概率为 $P（M）=\frac{5}{21}$．

（16）本小题主要考查同角三角函数的基本关系，两角差的正弦与余弦公式，二倍角的正弦与余弦公式，以及正弦定理、余弦定理等基础知识，考查运算求解能力．满分 13 分．

（Ⅰ）解：在△ABC 中，由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，可得 $b\sin A=a\sin B$，又由 $b\sin A=a\cos(B-\dfrac{\pi}{6})$，得 $a\sin B=a\cos(B-\dfrac{\pi}{6})$，即 $\sin B=\cos(B-\dfrac{\pi}{6})$，可得 $\tan B=\sqrt{3}$．又因为 $B\in(0，\pi)$，可得 $B=\dfrac{\pi}{3}$．

（Ⅱ）解：在△ABC 中，由余弦定理及 $a=2$，$c=3$，$B=\dfrac{\pi}{3}$，有 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=7$，故 $b=\sqrt{7}$．

由 $b\sin A=a\cos(B-\dfrac{\pi}{6})$，可得 $\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$．因为 $a<c$，故 $\cos A=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$．因此

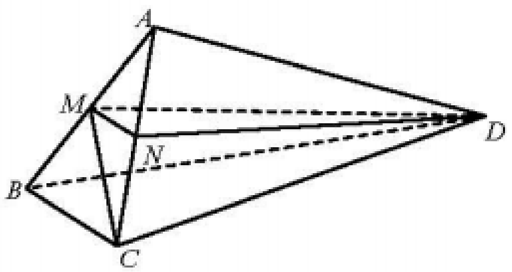
$\sin 2A=2\sin A\cos A=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$，$\cos 2A=2\cos^2 A-1=\dfrac{1}{7}$.

所以，$\sin(2A-B)=\sin 2A\cos B-\cos 2A\sin B=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\times\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{7}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$.

（17）本小题主要考查异面直线所成的角、直线与平面所成的角、平面与平面垂直等基础知识．考查空间想象能力、运算求解能力和推理论证能力．满分 13 分．

（Ⅰ）由平面 $ABC\perp$平面 ABD，平面 $ABC\cap$平面 $ABD=AB$，$AD\perp AB$，可得 $AD\perp$平面 ABC，故 $AD\perp BC$．

（Ⅱ）解：取棱 AC 的中点 N，连接 MN，ND．又因为 M 为棱 AB 的中点，故 $MN/\!/BC$．所以$\angle DMN$（或其补角）为异面直线 BC 与 MD 所成的角．



在 Rt△DAM 中，$AM=1$，故 $DM=\sqrt{AD^2+AM^2}=\sqrt{13}$．因为 $AD\perp$平面 ABC，故 $AD\perp AC$.

在 Rt△DAN 中，$AN=1$，故 $DN=\sqrt{AD^2+AN^2}=\sqrt{13}$．

在等腰三角形 DMN 中，$MN=1$，可得 $\cos\angle DMN=\dfrac{\frac{1}{2}MN}{DM}=\dfrac{\sqrt{13}}{26}$．

所以，异面直线 BC 与 MD 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{13}}{26}$．

（III）解：连接 CM. 因为△ABC 为等边三角形，M 为边 AB 的中点，故 $CM\perp AB$，$CM=\sqrt{3}$. 又因为平面 $ABC\perp$ 平面 ABD，而 $CM\subset$ 平面 ABC，故 $CM\perp$ 平面 ABD. 所以，$\angle CDM$ 为直线 CD 与平面 ABD 所成的角.

在 Rt△CAD 中，$CD=\sqrt{AC^2+AD^2}=4$.

在 Rt△CMD 中，$\sin\angle CDM=\dfrac{CM}{CD}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

所以，直线 CD 与平面 ABD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

（18）本小题主要考查等差数列、等比数列的通项公式及前 n 项和公式等基础知识.考查数列求和的基本方法和运算求解能力.满分 13 分.

（I）解：设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，由 $b_1=1$，$b_3=b_2+2$，可得 $q^2-q-2=0$.

因为 $q>0$，可得 $q=2$，故 $b_n=2^{n-1}$.所以 $T_n=\dfrac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$.

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d .由 $b_4=a_3+a_5$，可得 $a_1+3d=4$.由 $b_5=a_4+2a_6$，可得 $3a_1+13d=16$，从而 $a_1=1,d=1$，故 $a_n=n$，所以 $S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

（II）解：由（I），知 $T_1+T_2+\cdots+T_n=(2^1+2^2+\cdots+2^n)-n=2^{n+1}-n-2$.

由 $S_n+(T_1+T_2+\cdots+T_n)=a_n+4b_n$ 可得 $\dfrac{n(n+1)}{2}+2^{n+1}-n-2=n+2^{n+1}$，

整理得 $n^2-3n-4=0$，解得 $n=-1$（舍），或 $n=4$.所以 n 的值为 4.

（19）本小题主要考查椭圆的标准方程和几何性质、直线方程等基础知识.考查用代数方法研究圆锥曲线的性质.考查运算求解能力，以及用方程思想解决问题的能力.满分 14 分.

（I）解：设椭圆的焦距为 $2c$，由已知得 $\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{5}{9}$，又由 $a^2=b^2+c^2$，可得 $2a=3b$. 由 $|AB|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{13}$，从而 $a=3,b=2$.

所以，椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

（II）解：设点 P 的坐标为 (x_1,y_1)，点 M 的坐标为 (x_2,y_2)，由题意，$x_2>x_1>0$，

点 Q 的坐标为 $(-x_1,-y_1)$．由△BPM 的面积是△BPQ 面积的 2 倍，可得 $|PM|=2|PQ|$，

从而 $x_2-x_1=2[x_1-(-x_1)]$，即 $x_2=5x_1$．

易知直线 AB 的方程为 $2x+3y=6$，由方程组 $\begin{cases}2x+3y=6,\\ y=kx,\end{cases}$ 消去 y，可得 $x_2=\dfrac{6}{3k+2}$．由

方程组 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1,\\ y=kx,\end{cases}$ 消去 y，可得 $x_1=\dfrac{6}{\sqrt{9k^2+4}}$．由 $x_2=5x_1$，可得 $\sqrt{9k^2+4}=5(3k+2)$，

两边平方，整理得 $18k^2+25k+8=0$，解得 $k=-\dfrac{8}{9}$，或 $k=-\dfrac{1}{2}$．

当 $k=-\dfrac{8}{9}$ 时，$x_2=-9<0$，不合题意，舍去；当 $k=-\dfrac{1}{2}$ 时，$x_2=12$，$x_1=\dfrac{12}{5}$，符合题意．

所以，k 的值为 $-\dfrac{1}{2}$．

（20）本小题主要考查导数的运算、导数的几何意义、运用导数研究函数的性质等基础知识和方法，考查函数思想和分类讨论思想，考查综合分析问题和解决问题的能量，满分 14 分.

（Ⅰ）解：由已知，可得 $f(x)=x(x-1)(x+1)=x^3-x$，故 $f'(x)=3x-1$，因此 $f(0)=0$，$f'(0)=-1$，

又因为曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,\ f(0))$ 处的切线方程为 $y-f(0)=f'(0)(x-0)$，故所求切线方程为 $x+y=0$.

（Ⅱ）解：由已知可得

$f(x)=(x-t_2+3)(x-t_2)(x-t_2-3)=(x-t_2)^3-9(x-t_2)=x^3-3t_2x^2+(3t_2^2-9)x-t_2^2+9t_2$.

故 $f'(x)=3x^3-6t_2x+3t_2^2-9$.令 $f'(x)=0$，解得 $x=t_2-\sqrt{3}$，或 $x=t_2+\sqrt{3}$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化如下表：

x	$(-\infty,\ t_2-\sqrt{3})$	$t_2-\sqrt{3}$	$(t_2-\sqrt{3},\ t_2+\sqrt{3})$	$t_2+\sqrt{3}$	$(t_2+\sqrt{3},\ +\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+

$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以函数 $f(x)$的极大值为 $f(t_2-\sqrt{3})=(-\sqrt{3})^3-9\times(-\sqrt{3})=6\sqrt{3}$；函数小值为 $f(t_2+\sqrt{3})=(\sqrt{3})^3-9\times(\sqrt{3})=-6\sqrt{3}$.

（III）解：曲线 $y=f(x)$与直线 $y=-(x-t_2)-6\sqrt{3}$ 有三个互异的公共点等价于关于 x 的方程 $(x-t_2+d)(x-t_2)(x-t_2-d)+(x-t_2)+6\sqrt{3}=0$ 有三个互异的实数解，令 $u=x-t_2$，可得 $u^3+(1-d^2)u+6\sqrt{3}=0$.

设函数 $g(x)=x^3+(1-d^2)x+6\sqrt{3}$，则曲线 $y=f(x)$与直线 $y=-(x-t_2)-6\sqrt{3}$ 有三个互异的公共点等价于函数 $y=g(x)$有三个零点.

$g'(x)=3x^3+(1-d^2)$.

当 $d^2\le1$ 时，$g'(x)\ge0$，这时 $g'(x)$ 在 **R** 上单调递增，不合题意.

当 $d^2>1$ 时，$g'(x)=0$，解得 $x_1=-\frac{\sqrt{d^2-1}}{\sqrt{3}}$，$x_2=\frac{\sqrt{d^2-1}}{\sqrt{3}}$.

易得，$g(x)$在$(-\infty，x_1)$上单调递增，在$[x_1，x_2]$上单调递减，在$(x_2，+\infty)$上单调递增，

$g(x)$的极大值 $g(x_1)=g(-\frac{\sqrt{d^2-1}}{\sqrt{3}})=\frac{2\sqrt{3}(d^2-1)^{\frac{3}{2}}}{9}+6\sqrt{3}>0$.

$g(x)$的极小值 $g(x_2)=g(\frac{\sqrt{d^2-1}}{\sqrt{3}})=-\frac{2\sqrt{3}(d^2-1)^{\frac{3}{2}}}{9}+6\sqrt{3}$.

若 $g(x_2)\ge0$，由 $g(x)$的单调性可知函数 $y=f(x)$至多有两个零点，不合题意.

若 $g(x_2)<0$, 即 $(d^2-1)^{\frac{3}{2}}>27$，也就是 $|d|>\sqrt{10}$，此时 $|d|>x_2$，$g(|d|)=|d|+6\sqrt{3}>0$，且 $-2|d|<x_1, g(-2|d|)=-6|d|^3-2|d|+6\sqrt{3}<-62\sqrt{10}+6\sqrt{3}<0$，从而由 $g(x)$ 的单调性，可知函数 $y=g(x)$ 在区间 $(-2|d|,x_1),(x_1,x_2),(x_2,|d|)$ 内各有一个零点，符合题意.

所以 d 的取值范围是 $(-\infty,-\sqrt{10})\cup(\sqrt{10},+\infty)$.