2018年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．作答时，务必将答案写在答题卡上。写在本试卷及草稿纸上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

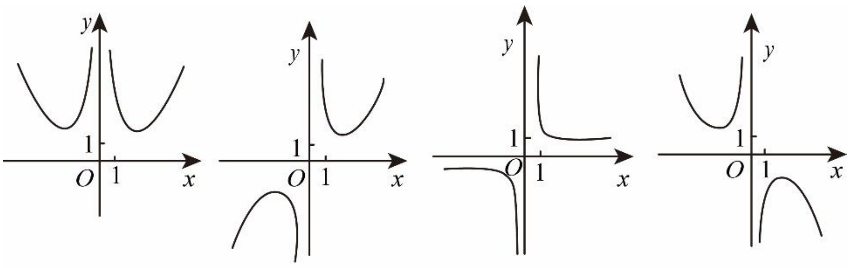
1．$\mathrm{i}(2+3\mathrm{i})=$

A．$3-2\mathrm{i}$　　B．$3+2\mathrm{i}$　　C．$-3-2\mathrm{i}$　　D．$-3+2\mathrm{i}$

2．已知集合 $A=\{1,3,5,7\}$，$B=\{2,3,4,5\}$，则 $A\cap B=$

A．$\{3\}$　　B．$\{5\}$　　C．$\{3,5\}$　　D．$\{1,2,3,4,5,7\}$

3．函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{x^2}$ 的图像大致为



A　　B　　C　　D

4．已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$，则 $\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=$

A．4　　B．3　　C．2　　D．0

5．从 2 名男同学和 3 名女同学中任选 2 人参加社区服务，则选中的 2 人都是女同学的概率为

A．0.6　　B．0.5　　C．0.4　　D．0.3

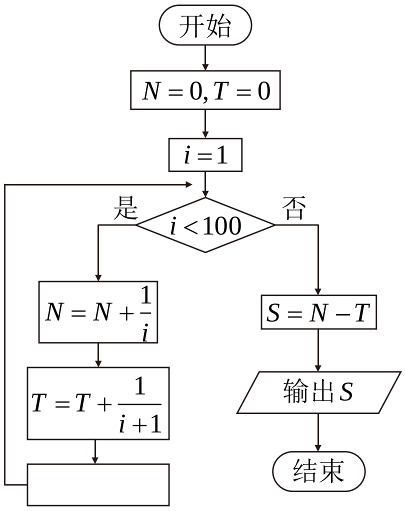
6．双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$，则其渐近线方程为

A．$y=\pm\sqrt{2}x$　　B．$y=\pm\sqrt{3}x$　　C．$y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$　　D．$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

7．在△ABC 中，$\cos\dfrac{C}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$BC=1$，$AC=5$，则 $AB=$

A．$4\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{30}$　　C．$\sqrt{29}$　　D．$2\sqrt{5}$

8．为计算 $S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$，设计了如图的程序框图，则在空白框中应填入



A．$i=i+1$　　B．$i=i+2$

C．$i=i+3$　　D．$i=i+4$

9．在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为棱 CC_1 的中点，则异面直线 AE 与 CD 所成角的正切值为

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{7}}{2}$

10．若 $f(x)=\cos x-\sin x$ 在 $[0, a]$ 是减函数，则 a 的最大值是

A．$\frac{\pi}{4}$　　B．$\frac{\pi}{2}$　　C．$\frac{3\pi}{4}$　　D．π

11．已知 F_1，F_2 是椭圆 C 的两个焦点，P 是 C 上的一点，若 $PF_1\perp PF_2$，且 $\angle PF_2F_1=60°$，则 C 的离心率为

A．$1-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$2-\sqrt{3}$　　C．$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　　D．$\sqrt{3}-1$

12．已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的奇函数，满足 $f(1-x)=f(1+x)$．若 $f(1)=2$，则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=$

A．-50　　B．0　　C．2　　D．50

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。、

13．曲线 $y=2\ln x$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线方程为__________.

14．若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+2y-5\geqslant 0, \\ x-2y+3\geqslant 0, \\ x-5\leqslant 0, \end{cases}$ 则 $z=x+y$ 的最大值为__________.

15．已知 $\tan(\alpha-\dfrac{5\pi}{4})=\dfrac{1}{5}$，则 $\tan\alpha=$__________.

16．已知圆锥的顶点为 S，母线 SA，SB 互相垂直，SA 与圆锥底面所成角为 $30°$，若 $\triangle SAB$ 的面积为 8，则该圆锥的体积为__________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 为选考题。考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17．（12 分）

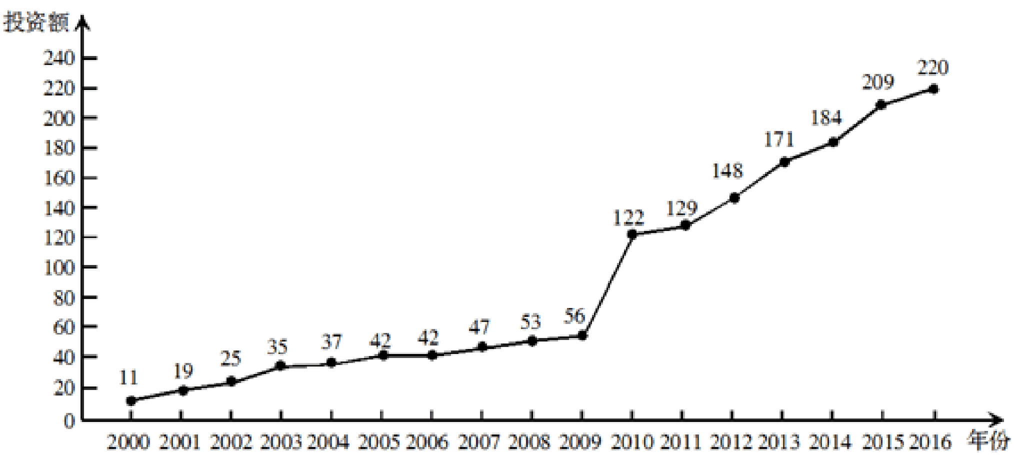
记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1=-7$，$S_3=-15$．

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求 S_n，并求 S_n 的最小值．

18．（12 分）

下图是某地区 2000 年至 2016 年环境基础设施投资额 y（单位：亿元）的折线图．



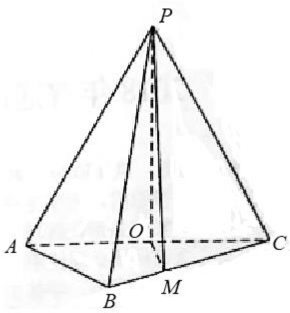
为了预测该地区 2018 年的环境基础设施投资额，建立了 y 与时间变量 t 的两个线性回归模型．根据 2000 年至 2016 年的数据（时间变量 t 的值依次为 $1,2,\cdots,17$）建立模型①：$\hat{y}=-30.4+13.5t$；根据 2010 年至 2016 年的数据（时间变量 t 的值依次为 $1,2,\cdots,7$）建立模型②：$\hat{y}=99+17.5t$．

（1）分别利用这两个模型，求该地区 2018 年的环境基础设施投资额的预测值；

（2）你认为用哪个模型得到的预测值更可靠？并说明理由．

19．（12 分）

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB=BC=2\sqrt{2}$，$PA=PB=PC=AC=4$，O 为 AC 的中点．



（1）证明：$PO \perp$ 平面 ABC；

（2）若点 M 在棱 BC 上，且 $MC = 2MB$，求点 C 到平面 POM 的距离.

20.（12 分）

设抛物线 C：$y^2 = 4x$ 的焦点为 F，过 F 且斜率为 $k(k>0)$ 的直线 l 与 C 交于 A，B 两点，$|AB| = 8$.

（1）求 l 的方程

（2）求过点 A，B 且与 C 的准线相切的圆的方程.

21.（12 分）

已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - a\left(x^2 + x + 1\right)$.

（1）若 $a = 3$，求 $f(x)$ 的单调区间;

（2）证明：$f(x)$ 只有一个零点.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22．[选修 4—4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2\cos\theta, \\ y = 4\sin\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数），直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + t\cos\alpha, \\ y = 2 + t\sin\alpha \end{cases}$（$t$ 为参数）.

（1）求 C 和 l 的直角坐标方程;

（2）若曲线 C 截直线 l 所得线段的中点坐标为 $(1,2)$，求 l 的斜率.

23．[选修 4—5：不等式选讲]（10 分）

设函数 $f(x) = 5 - |x + a| - |x - 2|$.

（1）当 $a = 1$ 时，求不等式 $f(x) \geqslant 0$ 的解集;

（2）若 $f(x) \leqslant 1$，求 a 的取值范围.

绝密★启用前

2018 年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学试题参考答案

一、选择题

1．D　　2．C　　3．B　　4．B　　5．D　　6．A

7．A　　8．B　　9．C　　10．C　　11．D　　12．C

二、填空题

13．$y=2x-2$　　14．9　　15．$\frac{3}{2}$　　16．8π

三、解答题

17．**解**：

（1）设$\{a_n\}$的公差为 d，由题意得 $3a_1+3d=-15$．

由 $a_1=-7$ 得 $d=2$．

所以$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2n-9$．

（2）由（1）得 $S_n=n^2-8n=(n-4)^2-16$．

所以当 $n=4$ 时，S_n 取得最小值，最小值为-16．

18．**解**：

（1）利用模型①，该地区 2018 年的环境基础设施投资额的预测值为

$\hat{y}=-30.4+13.5\times19=226.1$（亿元）．

利用模型②，该地区 2018 年的环境基础设施投资额的预测值为

$\hat{y}=99+17.5\times9=256.5$（亿元）．

（2）利用模型②得到的预测值更可靠．

理由如下：

（i）从折线图可以看出，2000 年至 2016 年的数据对应的点没有随机散布在直线 $y=-30.4+13.5t$ 上下，这说明利用 2000 年至 2016 年的数据建立的线性模型①不能很好地描述环境基础设施投资额的变化趋势．2010 年相对 2009 年的环境基础设施投资额有明显

增加，2010 年至 2016 年的数据对应的点位于一条直线的附近，这说明从 2010 年开始环境基础设施投资额的变化规律呈线性增长趋势，利用 2010 年至 2016 年的数据建立的线性模型 $\hat{y}=99+17.5t$ 可以较好地描述 2010 年以后的环境基础设施投资额的变化趋势，因此利用模型②得到的预测值更可靠.

（ii）从计算结果看，相对于 2016 年的环境基础设施投资额 220 亿元，由模型①得到的预测值 226.1 亿元的增幅明显偏低，而利用模型②得到的预测值的增幅比较合理，说明利用模型②得到的预测值更可靠.

以上给出了 2 种理由，考生答出其中任意一种或其他合理理由均可得分.

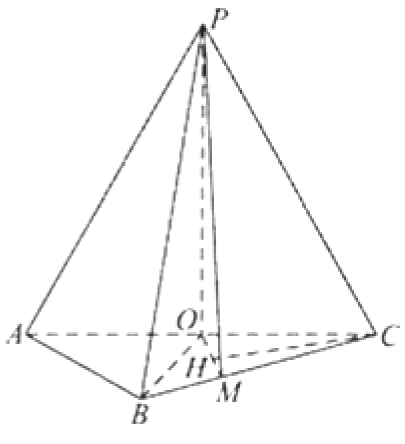
19．解：

（1）因为 $AP=CP=AC=4$，O 为 AC 的中点，所以 $OP\perp AC$，且 $OP=2\sqrt{3}$.

连结 OB. 因为 $AB=BC=\frac{\sqrt{2}}{2}AC$，所以△$ABC$ 为等腰直角三角形，且 $OB\perp AC$，$OB=\frac{1}{2}AC$ $=2$.

由 $OP^2+OB^2=PB^2$ 知，$OP\perp OB$.

由 $OP\perp OB$，$OP\perp AC$ 知 $PO\perp$平面 ABC.



（2）作 $CH\perp OM$，垂足为 H. 又由（1）可得 $OP\perp CH$，所以 $CH\perp$平面 POM.

故 CH 的长为点 C 到平面 POM 的距离.

由题设可知 $OC=\frac{1}{2}AC=2$，$CM=\frac{2}{3}BC=\frac{4\sqrt{2}}{3}$，$\angle ACB=45°$.

所以 $OM=\frac{2\sqrt{5}}{3}$，$CH=\frac{OC\cdot MC\cdot\sin\angle ACB}{OM}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

所以点 C 到平面 POM 的距离为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

20．解：

（1）由题意得 F（1，0），l 的方程为 $y=k$（x–1）（k>0）.

设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2）.

由 $\begin{cases} y=k(x-1) \\ y^2=4x \end{cases}$ 得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$.

$\Delta=16k^2+16=0$ ，故 $x_1+x_2=\dfrac{2k^2+4}{k^2}$.

所以 $|AB|=|AF|+|BF|=(x_1+1)+(x_2+1)=\dfrac{4k^2+4}{k^2}$.

由题设知 $\dfrac{4k^2+4}{k^2}=8$，解得 k=–1（舍去），k=1.

因此 l 的方程为 y=x–1.

（2）由（1）得 AB 的中点坐标为（3，2），所以 AB 的垂直平分线方程为

$y-2=-(x-3)$，即 $y=-x+5$.

设所求圆的圆心坐标为（x_0，y_0），则

$$\begin{cases} y_0=-x_0+5, \\ (x_0+1)^2=\dfrac{(y_0-x_0+1)^2}{2}+16. \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x_0=3, \\ y_0=2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x_0=11, \\ y_0=-6. \end{cases}$$

因此所求圆的方程为

$(x-3)^2+(y-2)^2=16$ 或 $(x-11)^2+(y+6)^2=144$.

21．解：

（1）当 a=3 时，f（x）$=\dfrac{1}{3}x^3-3x^2-3x-3$，$f'$（$x$）$=x^2-6x-3$.

令 f'（x）=0 解得 x=$3-2\sqrt{3}$ 或 x=$3+2\sqrt{3}$.

当 x∈（–∞，$3-2\sqrt{3}$）∪（$3+2\sqrt{3}$，+∞）时，f'（x）>0；

当 x∈（$3-2\sqrt{3}$，$3+2\sqrt{3}$）时，f'（x）<0.

故 f（x）在（–∞，$3-2\sqrt{3}$），（$3+2\sqrt{3}$，+∞）单调递增，在（$3-2\sqrt{3}$，$3+2\sqrt{3}$）单调递减.

（2）由于 $x^2+x+1>0$，所以 $f(x)=0$ 等价于 $\dfrac{x^3}{x^2+x+1}-3a=0$.

设 $g(x)=\dfrac{x^3}{x^2+x+1}-3a$，则 $g'(x)=\dfrac{x^2(x^2+2x+3)}{(x^2+x+1)^2}\geq 0$，仅当 $x=0$ 时 $g'(x)=0$，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增．故 $g(x)$ 至多有一个零点，从而 $f(x)$ 至多有一个零点．

又 $f(3a-1)=-6a^2+2a-\dfrac{1}{3}=-6(a-\dfrac{1}{6})^2-\dfrac{1}{6}<0$，$f(3a+1)=\dfrac{1}{3}>0$，故 $f(x)$ 有一个零点．

综上，$f(x)$ 只有一个零点．

22．解：

（1）曲线 C 的直角坐标方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1$．

当 $\cos\alpha\neq 0$ 时，l 的直角坐标方程为 $y=\tan\alpha\cdot x+2-\tan\alpha$，

当 $\cos\alpha=0$ 时，l 的直角坐标方程为 $x=1$．

（2）将 l 的参数方程代入 C 的直角坐标方程，整理得关于 t 的方程

$(1+3\cos^2\alpha)t^2+4(2\cos\alpha+\sin\alpha)t-8=0$．①

因为曲线 C 截直线 l 所得线段的中点 $(1,2)$ 在 C 内，所以①有两个解，设为 t_1，t_2，则 $t_1+t_2=0$．

又由①得 $t_1+t_2=-\dfrac{4(2\cos\alpha+\sin\alpha)}{1+3\cos^2\alpha}$，故 $2\cos\alpha+\sin\alpha=0$，于是直线 l 的斜率 $k=\tan\alpha=-2$．

23．解：

（1）当 $a=1$ 时，

$$f(x)=\begin{cases}2x+4, x\leq -1,\\ 2,-1<x\leq 2,\\ -2x+6, x>2.\end{cases}$$

可得 $f(x)\geq 0$ 的解集为 $\{x\mid -2\leq x\leq 3\}$．

（2）$f(x)\leq 1$ 等价于 $|x+a|+|x-2|\geq 4$．

而 $|x+a|+|x-2|\geq|a+2|$，且当 $x=2$ 时等号成立．故 $f(x)\leq 1$ 等价于 $|a+2|\geq 4$．

由 $|a+2|\geq 4$ 可得 $a\leq -6$ 或 $a\geq 2$，所以 a 的取值范围是 $(-\infty,-6]\cup[2,+\infty)$