2017年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. $\dfrac{3+i}{1+i}=$（　　）

A．$1+2i$　　B．$1-2i$　　C．$2+i$　　D．$2-i$

2. 设集合 $A=\{1,2,4\}$，$B=\{x\,|\,x^2-4x+m=0\}$．若 $A\cap B=\{1\}$，则 $B=$（　　）

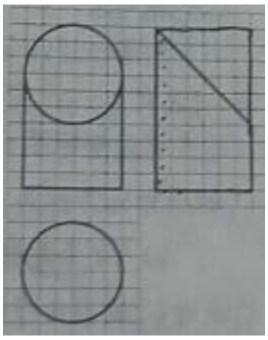
A．$\{1,-3\}$　　B．$\{1,0\}$　　C．$\{1,3\}$　　D．$\{1,5\}$

3. 我国古代数学名著《算法统宗》中有如下问题：“远望巍巍塔七层，红光点点倍加增，共灯三百八十一，请问尖头几盏灯？”意思是：一座7层塔共挂了381盏灯，且相邻两层中的下一层灯数是上一层灯数的2倍，则塔的顶层共有灯（　　）

A．1盏　　B．3盏　　C．5盏　　D．9盏

4. 如图，网格纸上小正方形的边长为1，学 科&网粗实线画出的是某几何体的三视图，该几何体由一平面将一圆柱截去一部分所得，则该几何体的体积为（　　）

A．90π　　B．63π　　C．42π　　D．36π



5. 设 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+3y-3\le 0\\ 2x-3y+3\ge 0\\ y+3\ge 0\end{cases}$，则 $z=2x+y$ 的最小值是（　　）

A．-15　　B．-9　　C．1　　D．9

6. 安排3名志愿者完成4项工作，每人至少完成1项，每项工作由1人完成，则不同的安排方式共有（　　）

A．12 种　　B．18 种　　C．24 种　　D．36 种

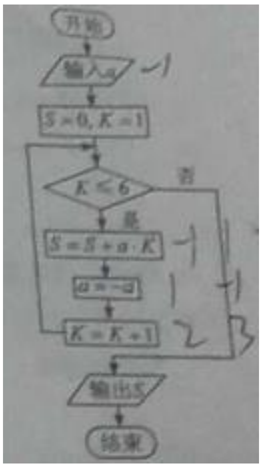
7. 甲、乙、丙、丁四位同学一起去问老师询问成语竞赛的成绩．老师说：你们四人中有2位优秀，2位良好，我现在给甲看乙、丙的成绩，给乙看丙的成绩，给丁看甲的成绩．看后甲对大家说：我还是不知道我的成绩．根据以上信息，则（　　）

A．乙可以知道四人的成绩　　B．丁可以知道四人的成绩

C．乙、丁可以知道对方的成绩　　D．乙、丁可以知道自己的成绩

8. 执行右面的程序框图，如果输入的 $a=-1$，则输出的 $S=$（　　）

A．2　　　　B．3　　　　C．4　　　　D．5



9.若双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的一条渐近线被圆$(x-2)^2+y^2=4$所截得的弦长为2，则C的离心率为（　　）

A．2　　　　B．$\sqrt{3}$　　　　C．$\sqrt{2}$

D．$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

10.已知直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$\angle ABC=120^\circ$，$AB=2$，$BC=CC_1=1$，则异面直线AB_1与BC_1所成角的余弦值为（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　　B. $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$　　　　C. $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　　　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

11.若$x=-2$是函数$f(x)=(x^2+ax-1)e^{x-1}$的极值点，则$f(x)$的极小值为（　　）

A. -1　　　　B. $-2e^{-3}$　　　　C. $5e^{-3}$

D.1

12.已知ΔABC是边长为2的等边三角形，P为平面ABC内一点，则$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$的最小值是（　　）

A. -2　　　　B. $-\dfrac{3}{2}$　　　　C. $-\dfrac{4}{3}$　　　　D. -1

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13.一批产品的二等品率为0.02，从这批产品中每次随机取一件，有放回地抽取100次，X表示抽到的二等品件数，则$DX=$__________.

14.函数 $f\left(x\right)=\sin^2 x+\sqrt{3}\cos x-\dfrac{3}{4}$ （$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$）的最大值是__________.

15.等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_3=3$，$S_4=10$，则$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{S_k}=$__________.

16.已知F是抛物线$C:y^2=8x$的焦点，M 是C上一点，FM 的延长线交y轴于点N．若M为FN的中点，则$|FN|=$____________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、解答过程或演算步骤。第 17~21 题为必做题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

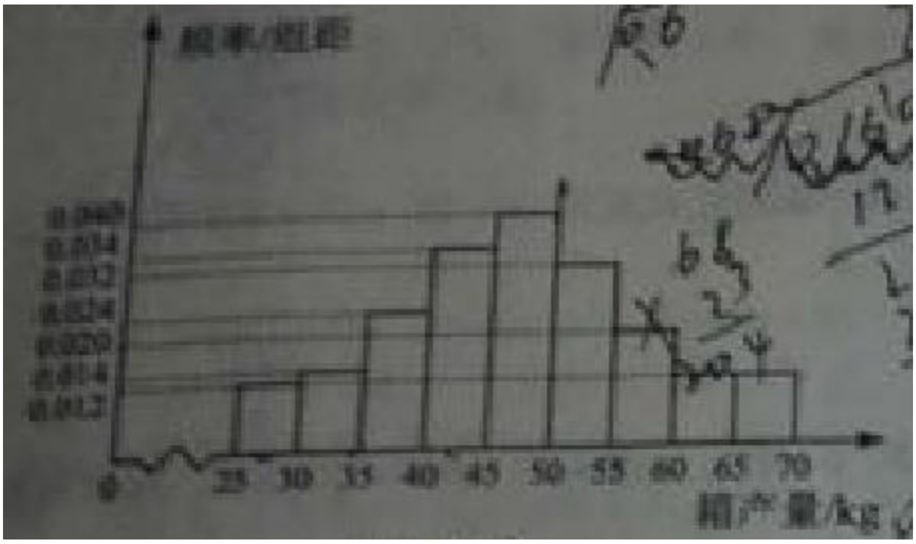
ΔABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c ,已知$\sin(A+C)=8\sin^2\dfrac{B}{2}$.

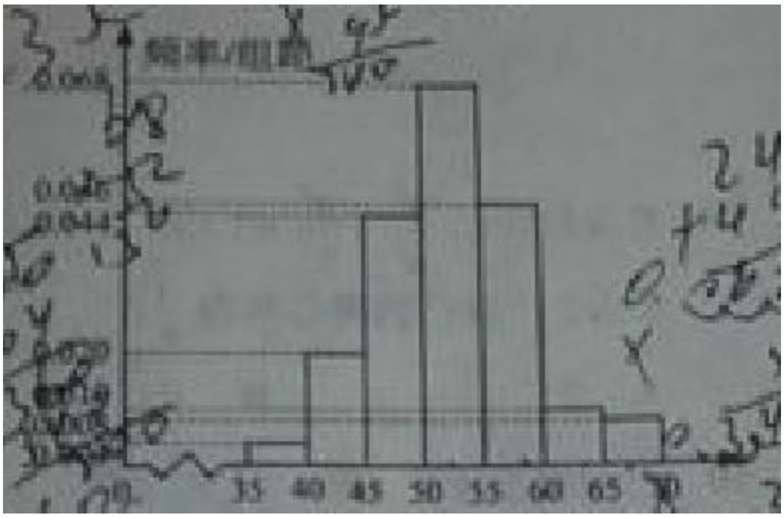
(1)求$\cos B$

(2)若$a+c=6$ ，ΔABC面积为2,求b.

18.（12 分）

淡水养殖场进行某水产品的新、旧网箱养殖方法的产量对比，收获时各随机抽取 100 个网箱，测量各箱水产品的产量（单位：kg）某频率直方图如下：





（1） 设两种养殖方法的箱产量相互独立，记 A 表示事件：旧养殖法的箱产量低于 50kg, 新养殖法的箱产量不低于 50kg,估计 A 的概率；

（2） 填写下面列联表，并根据列联表判断是否有 99%的把握认为箱产量与养殖方法有关：

	箱产量 < 50 kg	箱产量 ≥ 50 kg
旧养殖法		
新养殖法		

（3） 根据箱产量的频率分布直方图，求新养殖法箱产量的中位数的估计值（精确到 0.01）

附：

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

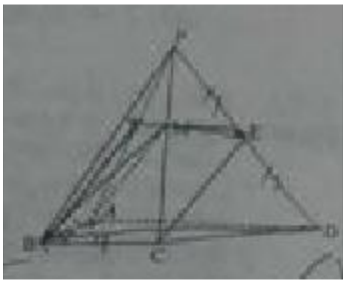
$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$

19.（12 分）

如图，四棱锥 P-ABCD 中，侧面 PAD 为等比三角形且垂直于底面三角形 BCD，$AB = BC = \frac{1}{2}AD, \angle BAD = \angle ABC = 90^0$， E 是 PD 的中点

（1）证明：学|科网直线 $CE//$ 平面 PAB

（2）点 M 在棱 PC 上，且直线 BM 与底面 ABCD 所成锐角为 45^0 ，求二面角 M-AB-D 的余弦值



20. （12 分）

设 O 为坐标原点，动点 M 在椭圆 C：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$上，过 M 做 x 轴的垂线，垂足为 N，点 P 满足 $\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\,\overrightarrow{NM}$.

(1) 求点 P 的轨迹方程；

(2) 设点 Q 在直线 x=-3 上，且$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=1$.证明：过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F.

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=ax^3-ax-x\ln x$,且 $f(x)\geq 0$.

（1）求 a;

（2）证明： $f(x)$存在唯一的极大值点x_0，且$e^{-2}<f(x_0)<2^{-3}$.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，按所做的第一题计分。

22.[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xoy 中，以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线C_1的极坐标方程为$\rho\cos\theta=4$.

（1）M 为曲线C_1上的动点，点 P 在线段 OM 上，且满足$OM\cdot OP=16$,求点 P 的轨迹C_2的直角坐标方程；

（2）设点 A 的极坐标为$(2,\frac{\pi}{3})$，点 B 在曲线C_2上，求ΔOAB面积的最大值.

23.[选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

已知$a>0,b>0,a^3+b^3=2$，证明：

（1）$(a+b)(a^5+b^5)\geq 4$;

（2）$a+b\leq 2$.

2017 年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学试题答案

一、选择题

1. D　2. C　3. B　4. B　5. A　6. D

7. D　8. B　9. A　10. C　11. A　12. B

二、填空题

13. 1.96　14. 1　15. $\dfrac{2n}{n+1}$　16. 6

三、解答题

17. 解：

（1）由题设及 $A+B+C=\pi$ 得 $\sin B=8\sin^2\dfrac{\pi}{2}$，故

$$\sin B=4(1-\cos B)$$

上式两边平方，整理得 $17\cos^2 B-32\cos B+15=0$

解得 $\cos B=1$（舍去），$\cos B=\dfrac{15}{17}$

（2）由 $\cos B=\dfrac{15}{17}$ 得 $\sin B=\dfrac{8}{17}$，故 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{4}{17}ac$

又 $S_{\Delta ABC}=2$，则 $ac=\dfrac{17}{2}$

由余弦定理学 科&网及 $a+c=6$ 得

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$

$$=(a+c)^2-2ac(1+\cos B)$$

$$=36-2\times\frac{17}{2}\times(1+\frac{15}{17})$$

$$=4$$

所以 $b=2$

18. 解：

（1）记 B 表示事件"旧养殖法的箱产量低于 50kg"，C 表示事件"新养殖法的箱产量不低于 50kg"

由题意知 $P(A)=P(BC)=P(B)P(C)$

旧养殖法的箱产量低于 50kg 的频率为

$(0.040+0.034+0.024+0.014+0.012)\times 5=0.62$

故 $P(B)$ 的估计值为 0.62

新养殖法的箱产量不低于 $50\,\text{kg}$ 的频率为

$$(0.068+0.046+0.010+0.008)\times 5=0.66$$

故 $P(C)$ 的估计值为 0.66

因此，事件 A 的概率估计值为 $0.62\times 0.66=0.4092$

（2）根据箱产量的频率分布直方图得列联表

	箱产量 $<50\,\text{kg}$	箱产量 $\geqslant 50\,\text{kg}$
旧养殖法	62	38
新养殖法	34	66

$$K^2=\frac{200\times(62\times 66-34\times 38)^2}{100\times 100\times 96\times 104}\approx 15.705$$

由于 $15.705>6.635$

故有 99% 的把握认为箱产量与养殖方法有关.

（3）因为新养殖法的箱产量频率分布直方图中，箱产量低于 $50\,\text{kg}$ 的直方图面积为

$(0.004+0.020+0.044)\times 5=0.34<0.5$，

箱产量低于 $55\,\text{kg}$ 的直方图面积为

$(0.004+0.020+0.044+0.068)\times 5=0.68>0.5$

故新养殖法箱产量的中位数的估计值为

$$50+\frac{0.5-0.34}{0.068}\approx 52.35(\text{kg}).$$

19.解：

（1）取 PA 中点 F，连结 EF，BF.

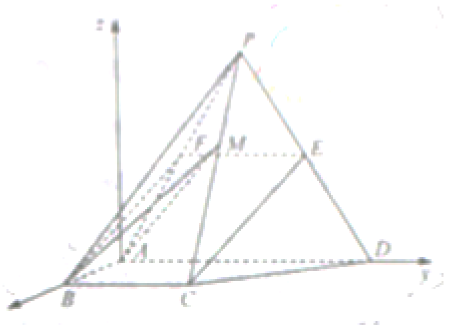
因为 E 为 PD 的中点，所以 $EF \parallel AD$，$EF=\frac{1}{2}AD$，由 $\angle BAD=\angle ABC=90^\circ$ 得 $BC/\!/AD$，

又 $BC=\frac{1}{2}AD$

所以 $EF \underline{/\!/} BC$. 四边形 $BCEF$ 为平行四边形，$CE/\!/BF$.

又 $BF\subset$ 平面PAB，$CE\not\subset$ 平面PAB，故 $CE/\!/$ 平面PAB

（2）



由已知得 $BA \perp AD$,以 A 为坐标原点，$\overrightarrow{AB}$ 的方向为 x 轴正方向，$\left|\overrightarrow{AB}\right|$ 为单位长，建立如图所示的空间直角坐标系 A-xyz,则

则 $A(0，0，0)$，$B(1，0，0)$，$C(1，1，0)$，$P(0，1，\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{PC}=(1,0,-\sqrt{3})$, $\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$ 则

$\overrightarrow{BM}=(x-1,\ y,\ z),\overrightarrow{PM}=(x,\ y-1,\ z-\sqrt{3})$

因为 BM 与底面 ABCD 所成的角为 45°，而 $\mathbf{n}=(0,0,\ 1)$ 是底面 ABCD 的法向量，所以

$$\left|\cos\left\langle\overrightarrow{BM},\mathbf{n}\right\rangle\right|=\sin 45^0，\quad \frac{|z|}{\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

即（x-1）^{2} +y^2 -z^2 =0

又 M 在棱 PC 上，学|科网设 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PC}$,则

$x=\lambda, y=1, z=\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda$

由①，②得 $\begin{cases} x=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y=1 \\ z=-\dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$（舍去），$\begin{cases} x=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y=1 \\ z=\dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$

所以 M$\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},1,\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$，从而 $\overrightarrow{AM}=\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},1,\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$

设 $\boldsymbol{m}=\left(x_0,y_0,z_0\right)$是平面 ABM 的法向量，则

$\begin{cases} \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \\ \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} \left(2-\sqrt{2}\right)x_0 + 2y_0 + \sqrt{6}z_0 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$

所以可取 **m**=（0，-$\sqrt{6}$，2）.于是 $\cos\langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}\rangle = \dfrac{\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$

因此二面角 M-AB-D 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

20.解

（1）设 P（x,y）,M（x_0,y_0）,设 N（x_0,0），$\overrightarrow{NP} = (x - x_0, y)$, $\overrightarrow{NM} = (0, y_0)$

由 $\overrightarrow{NP} = \sqrt{2}\overrightarrow{NM}$ 得 $x_0=x$, $y_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}y$

因为 M（x_0,y_0）在 C 上，所以 $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} = 1$

因此点 P 的轨迹方程为 $x^2 + y^2 = 2$

（2）由题意知 F（-1,0）.设 Q（-3，t）,P(m,n),则

$\overrightarrow{OQ} = (-3, t)$, $\overrightarrow{PF} = (-1 - m, -n)$, $\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{PF} = 3 + 3m - tn$，

$\overrightarrow{OP} = (m, n)$, $\overrightarrow{PQ} = (-3 - m, t - n)$,

由 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 1$ 得 $-3m - m^2 + tn - n^2 = 1$，又由（1）知 $m^2+n^2=2$，故

3+3m-tn=0

所以 $\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{PF} = 0$，即 $\overrightarrow{OQ} \perp \overrightarrow{PF}$.学.科网又过点 P 存在唯一直线垂直于 OQ，所以过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F.

21.解：

（1） $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$

设 $g(x) = ax - a - \ln x$，则 $f(x) = xg(x)$, $f(x) \geq 0$ 等价于 $g(x) \geq 0$

因为 $g(1)=0$, $g(x) \geq 0$, 故 $g'(1)=0$, 而 $g'(x) = a - \dfrac{1}{x}$, $g'(1)=a-1$, 得 $a = 1$

若 $a=1$，则 $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$.当 0＜x＜1 时，$g'(x)<0$, $g(x)$单调递减；当 x＞1 时，$g'(x)>0$,

$g(x)$单调递增.所以 x=1 是$g(x)$的极小值点，故$g(x)\geq g(1)=0$

综上，a=1

（2）由（1）知$f(x)=x^2-x-x\ln x, f'(x)=2x-2-\ln x$

设$h(x)=2x-2-\ln x$,则$h'(x)=2-\dfrac{1}{x}$

当$x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$时，$h'(x)<0$；当$x\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$时，$h'(x)>0$，所以$h(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$单调递减，在$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$单调递增

又$h\left(e^{-2}\right)>0, h\left(\dfrac{1}{2}\right)<0, h(1)=0$，所以$h(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$有唯一零点 x_0，在$\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$有唯一零点 1，且当$x\in(0,x_0)$时，$h(x)>0$；当$x\in(x_0,1)$时，$h(x)<0$，当$x\in(1,+\infty)$时，$h(x)>0$.

因为$f'(x)=h(x)$，所以 $x=x_0$是 f(x)的唯一极大值点

由$f'(x_0)=0$得$\ln x_0=2(x_0-1)$，故$f(x_0)=x_0(1-x_0)$

由$x_0\in(0,1)$得$f'(x_0)<\dfrac{1}{4}$

因为 $x=x_0$是 f(x)在（0,1）的最大值点，由$e^{-1}\in(0,1), f'\left(e^{-1}\right)\neq 0$得

$f(x_0)>f\left(e^{-1}\right)=e^{-2}$

所以$e^{-2}<f(x_0)<2^{-2}$

22.解：

（1）设 P 的极坐标为$(\rho，\theta)(\rho>0)$，M 的极坐标为$(\rho_1，\theta)(\rho_1>0)$，由题设知

$|OP|=\rho, |OM|=\rho_1=\dfrac{4}{\cos\theta}$

由$|OM|\cdot|OP|=16$得C_2的极坐标方程$\rho=4\cos\theta\ (\rho>0)$

因此C_2的直角坐标方程为$(x-2)^2+y^2=4\ (x\neq 0)$

（2）设点 B 的极坐标为$(\rho_B，\alpha)(\rho_B>0)$,由题设知

$|OA|=2$，$\rho_B=4\cos\alpha$,于是ΔOAB 面积

$$S=\frac{1}{2}|OA|\cdot\rho_B\cdot\sin\angle AOB$$
$$=4\cos\alpha\cdot\left|\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\right|$$
$$=2\left|\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|$$
$$\le 2+\sqrt{3}$$

当 $\alpha=-\frac{\pi}{12}$ 时，S 取得最大值 $2+\sqrt{3}$

所以△OAB 面积的最大值为 $2+\sqrt{3}$

23.解：

（1）

$$(a+b)(a^5+b^5)=a^6+ab^5+a^5b+b^6$$
$$=(a^3+b^3)^2-2a^3b^3+ab(a^4+b^4)$$
$$=4+ab(a^2-b^2)^2$$
$$\ge 4$$

（2）因为

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$=2+3ab(a+b)$$
$$\le 2+\frac{3(a+b)^2}{4}(a+b)=2+\frac{3(a+b)^3}{4}$$

所以 $(a+b)^3\le 8$，因此 a+b≤2.